

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

MC SYLLABUS 3.1

H.A. LAUWERIER

RANDWAARDE PROBLEMEN

DEEL 1

MATHEMATISCH CENTRUM

AMSTERDAM 1967

AMS (MOS) classificatie (1970): 35-01, 35J05

Tweede bijdruk: 1973

Inhoud

	blz.
Inleiding	3
1. Hulpbegrippen van de vectorrekening	5
2. De potentiaalvergelijking in drie dimensies	9
3. De potentiaalvergelijking in twee dimensies	13
4. Conforme afbeelding	19
5. Bronnen en putten	28
6. Green'se functies	33
7. Randwaardeproblemen voor onbegrensde gebieden	39
8. Scheiding van de variabelen	42
9. Bessel functies	48
10. Scheiding in cilindrische coördinaten	54
11. Scheiding in sferische coördinaten	59
12. Hydrodynamica	64
13. Vlakke potentiaalstroming	69
14. Wervels	77
15. Warmtegeleiding	85
16. Grondwaterstroming	89
Index	93

Inleiding

De in deze syllabus behandelde stof stemt overeen met een aan de Universiteit van Amsterdam gegeven college partiële differentiaalvergelijkingen van de mathematische fysica in de omvang van een jaaruur. Van dit uitgebreide onderwerp wordt hoofdzakelijk een differentiaalvergelijking van het elliptische type, de potentiaalvergelijking, behandeld. Het college heeft een elementair karakter. Verondersteld wordt dat de lezer reeds enige inleidende kennis van de theorie van de gewone differentiaalvergelijkingen en van de complexe functietheorie bezit. Deze syllabus is van beknopte aard. Getracht is de essentiële punten, stellingen en eigenschappen, zoveel mogelijk aan de hand van concrete voorbeelden toe te lichten. Aanbevolen kan worden voor uitvoeriger studie de opgegeven literatuur te bestuderen.

Eenvoudige prettige inleidingen tot de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen zijn

- SAGAN, H. Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics. Wiley, 1961.
- CHURCHILL, R.V. Fourier series and boundary value problems. Sec. ed. McGraw-Hill, 1963.

Voor het gebruik van de hulpmiddelen van de functietheorie raadplegen men

- CHURCHILL, R.V. Complex variables and applications. Sec. ed. McGraw-Hill, 1960. (Internat. student edition).

Problemen i.h.b. met betrekking tot de potentiaalvergelijking worden goed behandeld in het volgende voortreffelijke, moderne en niet te uitvoerige werk

- GARABEDIAN, P.R. Partial differential equations. Interscience, 1964.

De volgende handboeken kunnen eveneens aanbevolen worden.

- SOBOLEV, S.L. Partial differential equations of mathematical physics. Pergamon, 1964.
- TYCHONOFF, A.N. en A.A. SAMARSKI. Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Berlin, 1959.

KOSHLIYAKOV, N.S., M.M. SMIRNOV en E.B. GLINER. Differential equations of mathematical physics. Amsterdam, 1964.

Het handboek voor voortgezette studie is en blijft
COURANT, R. en D. HILBERT. Methods of mathematical physics.
Interscience.

1. Hulpbegrippen van de vectorrekening

We beschouwen in de regel scalar-, vector- en tensorvelden in de Euclidische ruimte met Cartesische coördinaten (x_1, x_2, x_3) . De componenten van de velden zijn doorgaans op eenduidige wijze gedefiniëerde functies voor een gebied D (eng. domain), i.e. een samenhangende open verzameling. Meestal zijn de componenten continu in de afsluiting \bar{D} van D , i.e. het gebied D met zijn rand ∂D . Verder bezitten de componenten meestal continue partiële afgeleiden in D . De voornaamste eigenschappen van deze velden vatten we hieronder kort samen.

Door toepassing van de nabla-operator ∇ op een tensorveld $T(x_1, x_2, x_3)$ ontstaat een nieuw tensorveld ∇T . Uit een scalarveld $c(x_1, x_2, x_3)$ leidt men aldus de gradient ∇c af. Hiervoor bezigt men de notaties

$$(1.1) \quad \nabla c, \quad \text{grad } c, \quad \frac{\partial c}{\partial x_i}.$$

De componenten van dit vectorveld staan loodrecht op de aequipotentiaalvlakken $c = \text{constant}$.

Uit een vectorveld $\vec{w}(x_1, x_2, x_3)$ leidt men de tensor $\nabla \vec{w}$ af. De invarianten van dit tensorveld zijn de divergentie $\nabla \cdot \vec{w}$ en de rotatie $\nabla \times \vec{w}$. Hier-voor heeft men de notaties

$$(1.2) \quad \nabla \cdot \vec{w}, \quad \text{div } \vec{w}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \quad \text{of} \quad \partial_i w_i,$$

en

$$(1.3) \quad \nabla \times \vec{w}, \quad \text{rot } \vec{w}, \quad \epsilon_{ijk} \partial_j w_k.$$

De divergentie van het gradientveld ∇c levert de Laplace operator Δ of $\nabla \cdot \nabla$ toegepast op c . Expliciet dus

$$(1.4) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Een gradientveld onderscheidt zich door het feit dat de rotatie identiek nul is. Analoog is bij een rotatieveld van het type $\vec{v} = \text{rot } \vec{w}$ de divergentie identiek nul. Dus

$$(1.5) \quad \text{rot grad } c = 0, \quad \text{div rot } \vec{w} = 0.$$

Tenslotte vermelden we de regel

$$(1.6) \quad \text{rot rot } \vec{w} = \text{grad div } \vec{w} - \Delta \vec{w}.$$

De richtingsafgeleide van de potentiaalfunctie $c(x_1, x_2, x_3)$ in de door de eenheidsvector \vec{e} aangegeven richting van de potentiaalfunctie $c(x_1, x_2, x_3)$ in een gegeven punt $P(x_1, x_2, x_3)$ is gedefiniëerd als

$$(1.7) \quad \frac{\partial c}{\partial \vec{e}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c(x_1 + t\vec{e}_1, x_2 + t\vec{e}_2, x_3 + t\vec{e}_3) - c(x_1, x_2, x_3)}{t}.$$

Er geldt dus

$$(1.8) \quad \frac{\partial c}{\partial \vec{e}} = \vec{e} \cdot \nabla c.$$

We beschouwen nu een scalarveld $c(x_1, x_2, x_3)$ met continue partiële afgeleiden $\partial_i c$ in een zeker gebied. Hierin beschouwen we een gesloten oppervlak S met continu variërend raakvlak - eventueel een oppervlak samengesteld uit een eindig aantal delen in elk waarvan het raakvlak continu verandert - zodanig, dat S door een willekeurige rechte lijn evenwijdig aan een der coördinaatassen in een eindig aantal punten gesneden wordt of er eventueel een geheel interval mee gemeen heeft. Dan geldt de eigenschap

$$(1.9) \quad \iiint_D \nabla c \, d\tau = \iint_S \vec{n} \, c \, d\sigma,$$

waarbij D het door S omsloten gebied is en \vec{n} de naar buiten gerichte eenheidsnormaal.

Toepassing van deze eigenschap op de componenten van een vectorveld \vec{w} leidt tot de volgende stelling van Gauss

$$(1.10) \quad \iiint_D \text{div } \vec{w} \, d\tau = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{w} \, d\sigma.$$

Een tweede toepassing van (1.9) betreft de stelling van Green

$$(1.11) \quad \iiint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) d\tau = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

Verwisseling van u en v hierin leidt tot een soortgelijke betrekking. Door aftrekking van de overeenkomstige leden komen we tot de volgende eigenschap welke eveneens de stelling van Green genoemd wordt

$$(1.12) \quad \iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Nemen we hierin als speciaal geval $v \equiv 1$ dan vinden we weer de stelling van Gauss (1.10) maar dan voor het gradientveld $\vec{w} = \nabla u$

$$(1.13) \quad \iiint_D \Delta u \, d\tau = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

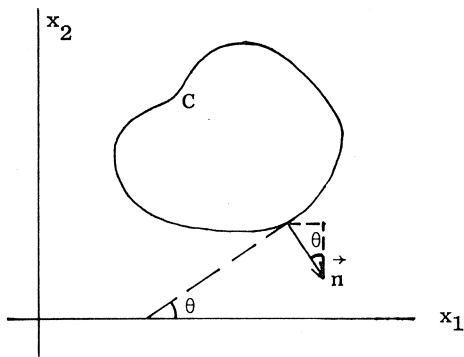


fig. 1.1

In twee dimensies gelden analoge betrekkingen. Hierbij wordt volgens fig. 1.1 geïntegreerd over bijv. een gesloten kromme C die een gebied S omsluit. Voor de componenten van de naar buiten gerichte normaal \vec{n} kan men schrijven

$$(1.14) \quad n_1 = \sin \theta = \frac{dx_2}{ds}, \quad n_2 = -\cos \theta = -\frac{dx_1}{ds}.$$

De stelling van Gauss in de vorm (1.10) luidt in twee dimensies

$$(1.15) \quad \iint_S \operatorname{div} \vec{w} \, d\sigma = \int_C \vec{n} \cdot \vec{w} \, ds,$$

of uitgeschreven

$$(1.15a) \quad \iint_S \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right) d\sigma = \int_C (w_1 \, dx_2 - w_2 \, dx_1).$$

Voor een gradientvector geldt als analogon van (1.13) de betrekking

$$(1.16) \quad \iint_S \Delta u \, d\sigma = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Bij sommige beschouwingen waarbij het aantal dimensies geen essentiële rol speelt gebruiken we soms een andere notatie. De stelling van Gauss in de driedimensionale vorm (1.10) of de tweedimensionale vorm (1.15) schrijven we dan als

$$(1.17) \quad \int_D \operatorname{div} \vec{w} \, dP = \int_{\partial D} \vec{n} \cdot \vec{w} \, dP,$$

waarbij dP het volumeelement, resp. oppervlakteelement, resp. lijnelement is.

We beschouwen weer een ruimtelijk vectorveld \vec{w} waarvan de componenten continu differentiëerbare functies zijn. Dan geldt de volgende stelling van Stokes welke betrekking heeft op een begrensde vlakdeel S dat een enkelvoudig samenhangende topologische structuur heeft en dat begrensd wordt door een gesloten kromme C . Aangenomen verder dat S en C voldoende glad zijn dan is de stelling van Stokes aldus

$$(1.18) \quad \iint_S \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_C \vec{w} \cdot \vec{t} \, ds,$$

waarbij \vec{t} de raaklijnvector aan C met lengte 1 is, zodat $\vec{t} \, ds$ het vectoriële lijnelement is.

Voor een in het x_3 -vlak gelegen kromme C geldt de volgende tweedimensionale specialisatie van (1.18)

$$(1.19) \quad \iint_S \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) d\sigma = \oint_C (w_1 \, dx_1 + w_2 \, dx_2).$$

Dit is geen nieuw resultaat maar slechts een versie van de stelling van Gauss (1.15a) met $(-w_2, w_1)$ i.p.v. (w_1, w_2) .

2. De potentiaalvergelijking in drie dimensies

De vergelijking

$$(2.1) \quad \Delta u = 0$$

heet de vergelijking van Laplace of de potentiaalvergelijking. We beschouwen deze vergelijking in de driedimensionale ruimte. In Cartesische coördinaten kunnen we (2.1) schrijven als

$$(2.1a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Een oplossing u van (2.1) in een zeker gebied D , welke continue partiële afgeleiden van de tweede orde bezit, heet een harmonische functie.

De randwaardeproblemen met betrekking tot (2.1) kunnen van het volgende type zijn:

1. Probleem van Dirichlet of eerste randwaardeprobleem

$$(2.2) \quad u = f \quad \text{op} \quad \partial D,$$

d.w.z. een oplossing van (2.1) te vinden welke op de rand van D gegeven waarden f aanneemt.

2. Probleem van Neumann of tweede randwaardeprobleem

$$(2.3) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{op} \quad \partial D,$$

d.w.z. een oplossing van (2.1) te vinden met een voorgeschreven normaalafgeleide op de rand van D .

3. Derde randwaardeprobleem

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial n} + hu = f \quad \text{op} \quad \partial D,$$

waarbij h een constante is.

Voor $h \rightarrow \infty$ resp. $h \rightarrow 0$ gaat (2.4) in de vorige twee randvoorwaarden over.

Onder vrij algemene veronderstellingen omtrent de geometrie van D en de aard van de gegeven randfunctie f zijn deze problemen eenduidig oplosbaar en hangt de oplossing op continue wijze van de randfunctie af. Van theoretisch standpunt bezien is de existentie het moeilijkst te bewijzen.

De eenduidigheid en de continue afhankelijkheid van de randfunctie zal hieronder ter sprake komen. Indien het probleem van Dirichlet bij gegeven f twee verschillende oplossingen zou bezitten zou de verschilfunctie in D harmonisch zijn en op ∂D identiek verdwijnen. We zullen later bewijzen dat dit onmogelijk is op grond van de stelling dat een harmonische functie zijn uiterste waarden slechts op de rand kan aannemen. De oplossing van het Neumann probleem is op een additieve constante na bepaald. Passen we hierbij de stelling van Gauss toe in de vorm (1.13), in de veronderstelling dat de geometrie van D deze toepassing veroorlooft, dan geldt voor een oplossing u van dit probleem

$$(2.5) \quad \iint_{\partial D} f \, d\sigma = 0,$$

derhalve een nodige voorwaarde voor de oplosbaarheid van het Neumann probleem. Is deze voorwaarde vervuld dan is dit probleem afgezien van een additieve constante eenduidig oplosbaar. Het derde randwaardeprobleem tenslotte is eenduidig oplosbaar mits $h > 0$.

Passen we voor een harmonische functie u de stelling van Green (1.11) toe met $v = u$ dan is

$$(2.6) \quad \iiint_D (\text{grad } u)^2 \, d\tau = \iint_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

Bij het probleem van Dirichlet met $f \equiv 0$ is het rechterlid nul zodat ook $\text{grad } u \equiv 0$ in D hetgeen in verband met de nulwaarde op de rand $u \equiv 0$ impliceert. Deze conclusie houdt in verband met een bovenstaande opmerking de eenduidige oplosbaarheid van het Dirichlet probleem in. De gevolgde redenering is evenwel niet geheel streng omdat stilzwijgend bestaan en integreerbaarheid van $\frac{\partial u}{\partial n}$ op ∂D aangenomen is. Bij het probleem van Neumann met $f \equiv 0$ komen we eveneens tot de conclusie $\text{grad } u \equiv 0$ zodat u een constante is. Oplossingen van het Neumann probleem verschillen dus hoogstens in een constante.

Bij het derde randwaardeprobleem leidt bij afwezigheid van f (2.6) tot

$$(2.7) \quad \iiint_D (\text{grad } u)^2 \, d\tau + h \iint_{\partial D} u^2 \, d\sigma = 0,$$

zodat voor $h > 0$ tot $u \equiv 0$, d.w.z. tot eenduidige oplosbaarheid, besloten kan worden.

Lemma 2.1

De afstandfunctie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

is een oplossing van de vergelijking van Laplace

$$(2.8) \quad \Delta \frac{1}{R} = 0$$

behalve in het punt (x_0, y_0, z_0) .

Bewijs:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{R^5}, \quad \text{enz.}$$

Lemma 2.2

Voor een functie u , welke harmonisch in een (begrensd) gebied D is, geldt de voorstelling

$$(2.9) \quad 4\pi u(x_0, y_0, z_0) = \iint_{\partial D} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right) d\sigma.$$

Bewijs:

We passen de stelling van Green (1.12) toe op u en R^{-1} voor het gebied gevormd door D minus een klein bolletje s met straal ε om (x_0, y_0, z_0) als middelpunt. Dan is

$$\iint_{\partial D - \partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right) d\sigma = 0.$$

Voor $\varepsilon \rightarrow 0$ geldt wegens de uniforme begrensdsheid van $\frac{\partial u}{\partial n}$

$$\left| \iint_{\partial s} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right| \leq \frac{c}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow 0.$$

Verder geldt voor $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\iint_{\partial S} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_{\partial S} u \, d\sigma \rightarrow 4\pi u(x_0, y_0, z_0).$$

Opmerking

De formule (2.9) is afgeleid in de veronderstelling dat (x_0, y_0, z_0) tot D behoort. Ligt evenwel dit punt buiten D dan blijft deze formule geldig met de conventie dat $u \equiv 0$ buiten D genomen wordt.

Stelling 2.1

De waarde van een harmonische functie in het middelpunt van een bol stemt overeen met de gemiddelde waarde op het boloppervlak.

Bewijs:

Uit (2.9) volgt voor een bolvormig gebied

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma + \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial D} u \, d\sigma.$$

Omdat u harmonisch is verdwijnt de eerste term van het rechterlid op grond van de stelling van Gauss in de vorm (1.13).

Uit deze stelling vloeit onmiddellijk voort dat een harmonische functie geen inwendig maximum of minimum bezit. Had u bijvoorbeeld een maximum in (x_0, y_0, z_0) dan zou hierom een bol aangebracht kunnen worden waarop u overal lagere of althans niet hogere waarden aanneemt. Dit geeft op grond van stelling 2.1 een tegenspraak, tenzij u een constante is.

Dus

Stelling 2.2

Een in het gebied D harmonische functie neemt zijn uiterste waarden aan op ∂D .

Indien bekend is dat een harmonische functie op ∂D verdwijnt volgt hieruit dat de functie in D identiek nul is. Met andere woorden volgt hieruit dat het probleem van Dirichlet hoogstens één oplossing heeft.

3. De potentiaalvergelijking in twee dimensies

Voor de vergelijking van Laplace in de tweedimensionale ruimte

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

geschreven in Cartesische coördinaten (x,y) , heeft men dezelfde klassificatie van randwaardeproblemen als in de driedimensionale ruimte.

Voert men in (3.1) poolcoördinaten (r,θ) in met behulp van

$$(3.2) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

dan gaat (3.1) over in

$$(3.3) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Men kan deze omzetting gemakkelijk a.v. rechtstreeks bewijzen. Uit (3.2) volgt

$$\begin{aligned} r u_r &= x u_x + y u_y \\ u_\theta &= x u_y - y u_x, \end{aligned}$$

en vervolgens

$$\begin{aligned} r (r u_r)_r &= x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y \\ u_{\theta\theta} &= y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} - x u_x - y u_y, \end{aligned}$$

zodat

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Oplossingen van (3.3) welke niet van θ afhangen voldoen aan

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0,$$

zodat

$$(3.5) \quad u = A \ln r + B,$$

waarbij A en B constanten zijn.

Omdat elk punt van het (x,y)-vlak tot oorsprong van een stelsel pool-coördinaten gekozen kan worden volgt hieruit het volgende analogon van lemma 2.1.

Lemma 3.1

De afstandfunctie

$$\ln r = \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

is een oplossing van de vergelijking van Laplace

$$\Delta \ln r = 0$$

behalve in het punt (x_0, y_0) .

Het analogon van lemma 2.2 luidt

Lemma 3.2

Voor een functie u, welke harmonisch in een (begrensd) gebied D is, geldt de voorstelling

$$(3.6) \quad 2\pi u(x_0, y_0) = \iint_{\partial D} \left(u \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

Als in de vorige paragraaf volgt hieruit

Stelling 3.1

De waarde van een harmonische functie in het middelpunt van een cirkel stemt overeen met de gemiddelde waarde op de cirkelomtrek.

Ook in het tweedimensionale vlak neemt een harmonische functie zijn uiterste waarden dus hoogstens op de rand aan. Dit betekent wederom dat het vlakke probleem van Dirichlet niet meer dan één oplossing toelaat. De eenduidigheid van het probleem van Neumann en van het derde randwaardeprobleem voor $h > 0$ volgen als in de vorige paragraaf uit het volgende tweedimensionale analogon van (2.6)

$$(3.7) \quad \iint_D (\text{grad } u)^2 \, d\sigma = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds.$$

Tot zover is de behandeling van het tweedimensionale geval nauwelijks verschillend van die van de driedimensionale potentiaalvergelijking. De tweedimensionale vergelijking van Laplace veroorlooft evenwel een grootscheeps gebruik van de hulpmiddelen van de theorie van de analytische functies, iets wat zich niet tot driedimensionale problemen uitstrekt.

We beschouwen een analytische functie $w = f(z)$ van de complexe variabele $z = x + iy$ en we schrijven

$$(3.8) \quad w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

In een gebied G waar $f(z)$ regulier is zijn de functies u en v onbeperkt differentiëerbaar en voldoen zij aan de volgende vergelijkingen van Cauchy en Riemann

$$(3.9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Hieruit volgt dan dat zowel u als v oplossingen van de vergelijking van Laplace zijn, m.n.

$$(3.10) \quad \Delta u = \Delta v = 0.$$

Harmonische functies u en v welke door de Cauchy-Riemann betrekkingen verbonden zijn heten geconjugueerd, en wel heet v een geconjugueerd harmonische van u . Anderzijds is u een geconjugueerd harmonische van $-v$. We kunnen dus harmonische functies vinden door van een willekeurige analytische functie hetzij het reële hetzij het imaginaire deel te nemen. We kunnen zonder moeite bewijzen dat op deze wijze alle harmonische functies verkregen kunnen worden.

Zij $u(x,y)$ een gegeven harmonische functie, dan vormen we de functie

$$(3.11) \quad v(x,y) = \int_{P_0}^P (u_x \, dy - u_y \, dx),$$

waarbij geïntegreerd wordt over een kromme die de punten $P_0(x_0, y_0)$ en $P(x,y)$ verbindt.

Volgens (1.14) kunnen we schrijven

$$u_x dy - u_y dx = (\vec{n} \cdot \text{grad } u) ds = \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Voor een gesloten contour C geldt dus op grond van de stelling van Gauss (1.16)

$$\int_C (u_x dy - u_y dx) = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_S \Delta u d\sigma = 0,$$

zodat de in (3.11) gedefiniëerde functie niet afhangt van de vorm van de kromme die P_0 met P verbindt. Wel is v afhankelijk van de keuze van het beginpunt P_0 , maar het is duidelijk dat de overgang naar een ander beginpunt slechts resulteert in een additieve constante.

We zullen nu bewijzen dat de door (3.11), op een additieve constante na, gedefiniëerde functie v aan de Cauchy-Riemann relaties voldoet en dus met u geconjugéerd is. Kiezen we bijv. voor de weg P_0P een horizontaal lijnelement Δx dan volgt uit (3.11)

$$v(x+\Delta x, y) - v(x, y) = - \int_x^{x+\Delta x} u_y dx$$

zodat voor $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Op analoge wijze bewijst men de tweede betrekking van Cauchy en Riemann. De volgens (3.8) uit u en v gevormde complexe functie is daarmee analytisch.

Bij wijze van illustratie zullen we hieronder het probleem van Dirichlet voor de cirkel $x^2 + y^2 < 1$ oplossen met gebruikmaking van de theorie van de complexe functies.

Het probleem is een harmonische functie $u(x, y)$ te vinden welke op de rand van het cirkelvormige gebied $x^2 + y^2 < 1$ een voorgeschreven waarde $f(\theta)$, waarbij $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, aanneemt.

We kunnen u opvatten als het reële deel van een analytische functie $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Indien $w(z)$ op de rand $|z| = 1$ bekend was zou $w(z)$ voor het binnengebied $|z| < 1$ eenvoudig te schrijven zijn als

$$(3.12) \quad w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |\zeta| = 1.$$

We kunnen hiervoor ook schrijven met $\zeta = e^{i\theta}$

$$(3.13) \quad w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u + iv}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta.$$

Op het eerste gezicht lijkt dit resultaat weinig waardevol aangezien het imaginaire deel van w volledig onbekend is. Terloops merken we op dat voor $z = 0$ de uitdrukking (3.13) overgaat in

$$w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(e^{i\theta}) d\theta,$$

waarmede stelling 3.1 teruggevonden is.

Op de volgende wijze kan door eliminatie van v uit (3.13) een bruikbaar resultaat afgeleid worden. Daartoe merken we op dat het rechterlid van (3.12) voor $|z| > 1$ nul is. Is nu \bar{z}^{-1} het t.o.v. de eenheidscirkel in- vers gelegen punt met betrekking tot het inwendige punt z , dan geldt

$$(3.14) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u + iv}{1 - \bar{z}e^{-i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w(\zeta)}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} d\zeta = w(0).$$

Combineren we dit resultaat met (3.13) dan komt er

$$w(z) + w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{1 - ze^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - \bar{z}e^{-i\theta}} \right\} w d\theta.$$

Aangezien de uitdrukking tussen accolades achter het integraalteken reëel is vinden we door van beide leden het reële deel te nemen

$$u(x,y) + u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{1 - ze^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - \bar{z}e^{-i\theta}} \right\} f(\theta) d\theta,$$

waarmede $v(x,y)$ geëlimineerd is.

Daar $u(0,0)$ reeds bekend is als het gemiddelde van $f(\theta)$ vinden we na een kleine berekening het volgende resultaat, dat bekend staat als de integraalformule van Poisson

$$(3.15) \quad u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\theta) d\theta,$$

waarbij $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$.

Achteraf blijkt dat voor de oplosbaarheid van het gestelde probleem van Dirichlet aan $f(\theta)$ slechts zeer geringe eisen gesteld behoeven te worden. Integreerbaarheid is reeds voldoende opdat (3.15) zinvol is. Het onderzoek van het gedrag van u in de omgeving van een punt op de rand vereist evenwel tamelijk veel zorg. Men kan bewijzen dat voor een continue randfunctie $f(\theta)$ de randwaarden op continue wijze vanuit het binnengebied bereikt worden.

4. Conforme afbeelding

De transformatie bepaald door

$$(4.1) \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

waarbij de rechterleden continu differentiëerbare functies zijn, beeldt een (u, v) -gebied af op een (x, y) -gebied. Zijn (u_0, v_0) en (x_0, y_0) corresponderende punten dan wordt de afbeelding in de omgeving van deze punten benaderd door de lineaire affiene afbeelding ^{*)}

$$(4.2) \quad \begin{cases} \Delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \\ \Delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v. \end{cases}$$

Als voorwaarde voor de omkeerbaarheid van de transformatie geldt dat de determinant van (4.2), de Jacobiaan van (4.1), gedefiniëerd door

$$(4.3) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

van nul verschilt.

Door de affiene transformatie (4.2) wordt een rechthoek met zijden Δu , Δv overgevoerd in een parallelogram met zijden Δx , Δy terwijl het oppervlak van het parallelogram gelijk is aan dat van de rechthoek vermenigvuldigd met de absolute waarde van de Jacobiaan, d.w.z.

$$(4.4) \quad \frac{\text{opp. } (x, y)}{\text{opp. } (u, v)} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

We nemen aan dat de transformatie (4.1) geldig is in een zeker gebied en dat daar de Jacobiaan tekenvast is. De transformatie is dan (1-1)-duidelijk en er bestaat een inverse transformatie

$$(4.5) \quad \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

^{*)} In deze paragraaf wordt het symbool Δ alleen in de betekenis van differentie gebruikt.

De lineaire benadering van (4.5)

$$(4.6) \quad \begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y, \end{cases}$$

is dan de inverse van (4.2) terwijl de Jacobiaan van (4.5) de reciproke van die van (4.1) is, d.w.z.

$$(4.7) \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1.$$

Bij toepassingen wordt soms de aandacht alleen geconcentreerd op het (x,y) -vlak. Door de transformatie (4.1) of (4.5) wordt dan hierin een kromlijinig coördinatenstelsel ingevoerd. Het rechthoekige (x,y) -net gaat dan over in een kromlijinig (u,v) -net waarbij de basislijnen $u = u_0$ en $v = v_0$ door (4.5) bepaald zijn.

Van bijzonder belang zijn de hoektrouwe of conforme afbeeldingen. Hierbij blijven hoeken invariant zodat in het bovenstaande beeld het (u,v) -stelsel orthogonaal is. Opdat de transformatie (4.1) of (4.5) hoektrouw is, is nodig en voldoende dat in elk punt de locale lineaire transformatie de combinatie is van een draaiing en een centrale vermenigvuldiging.

Achten we de transformatie (4.1) of (4.5) niet verschillend van die waarbij u en v verwisseld zijn dan kunnen we ons beperken tot een echte draaiing zodat de coëfficiëntenmatrix van bijv. (4.6) van de volgende vorm moet zijn

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos \alpha & \lambda \sin \alpha \\ -\lambda \sin \alpha & \lambda \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgen dus voor de partiële afgeleiden van u en v de twee betrekkingen

$$(4.8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dit zijn precies de vergelijkingen van Cauchy en Riemann voor het reële

en imaginaire deel van een complexe analytische functie. Elke conforme afbeelding kan dus verkregen worden door uit te gaan van een dergelijke functie $w = f(z)$ en deze te splitsen in reëel en imaginair deel.

Dat anderzijds elke analytische functie een dergelijke afbeelding levert volgt onmiddellijk uit het feit dat in de omgeving van $z = z_0$ de analytische functie benaderd wordt door de lineaire functie

$$(4.9) \quad w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0),$$

welke meetkundig een draaiing over $\arg f'(z_0)$ is gecombineerd met een vermenigvuldiging met de factor $|f'(z_0)|$. De complexe afbeelding $w = f(z)$ is hoektrouw voorzover $f'(z) \neq 0$.

Voorbeeld 4.1

De transformatie

$$(4.10) \quad w = \frac{az + b}{cz + d}$$

is een conforme afbeelding waarbij cirkels en rechten in het z -vlak overgaan in soortgelijke lijnen in het w -vlak.

In het bijzonder wordt voor willekeurige α door

$$(4.11) \quad w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (\operatorname{Im} z_0 > 0)$$

het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} z > 0$ afgebeeld op het binnengebied van de eenheids-cirkel in het w -vlak $|w| < 1$ terwijl i.h.b. het punt z_0 overgaat in het middelpunt $w = 0$ van de eenheidscirkel.

Voorbeeld 4.2

$$(4.12) \quad w = z^\mu, \quad \mu \geq \frac{1}{2}.$$

Deze transformatie beeldt de sector $0 < \arg z < \pi/\mu$ af op het bovenhalfvlak $\operatorname{Im} w > 0$. De afbeelding is hoektrouw met uitzondering van $z = 0$, $w = 0$.

Volgens een reeds in 1851 door Riemann uitgesproken stelling is het altijd mogelijk een enkelvoudig samenhangend gebied G waarvan de rand minstens twee verschillende punten bevat op de eenheidscirkel af te beelden. Uit het voorbeeld 4.1 volgt dat hierbij nog enige vrijheid bestaat omdat de eenheidscirkel door de transformatie (4.11) op zichzelf afgebeeld wordt. Men kan dan ook zorgen dat een willekeurig gekozen punt van G op het middelpunt van de eenheidscirkel wordt afgebeeld. De preciese formulering van Riemann's stelling volgt hieronder. Voor het tamelijk gecompliceerde bewijs zij naar de literatuur verwezen.

Stelling 4.1 (Riemann)

Voor een enkelvoudig samenhangend gebied waarvan de rand minstens twee verschillende punten bevat bestaat er een functie $w = f(z)$ welke G conform op de eenheidscirkel $|w| < 1$ afbeeldt. Als z_0 een willekeurig gekozen punt van G is, is $f(z)$ eenduidig vastgelegd door de eisen

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) > 0.$$

Hoe belangrijk deze stelling voor de theorie ook is, in de praktijk van de toepassingen op mathematisch-fysische problemen heeft men er weinig aan. Gewoonlijk tracht men met behulp van in tabellen *) gegeven afbeeldingsfuncties een gevraagde afbeelding stapsgewijze tot stand te brengen.

Voorbeeld 4.3

De afbeelding van een halve cirkel $x^2 + y^2 < 1, y > 0$ op een volle cirkel $u^2 + v^2 < 1$ kan in de volgende stappen tot stand gebracht worden.

Door de afbeeldingen

$$w_1 = \frac{1+z}{1-z}, \quad w_2 = w_1^2, \quad w = \frac{w_2 - i}{w_2 + i}$$

wordt de halve cirkel eerst afgebeeld op een kwartvlak, vervolgens wordt het kwartvlak afgebeeld op het bovenhalfvlak waarna tenslotte het bovenhalfvlak in de volle eenheidscirkel overgaat. De resulterende

*) Kober, Dictionary of conformal representations, Dover, 1957.

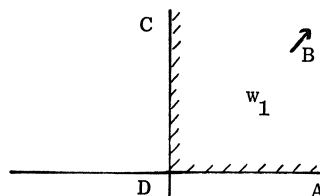
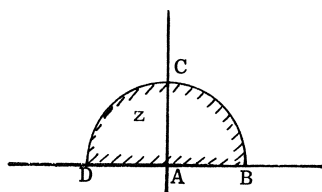
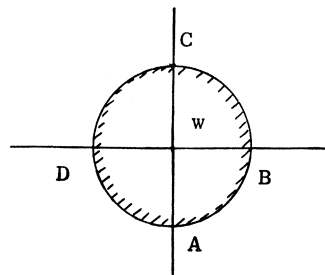
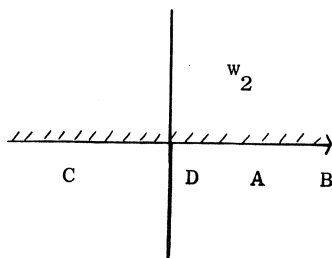


fig. 4.1



transformatie is daarmee

$$(4.13) \quad w = \frac{(z+1)^2 - i(z-1)^2}{(z+1)^2 + i(z-1)^2}.$$

Hieronder vermelden we een aantal in toepassingen tamelijk veel voorkomende conforme afbeeldingen.

De afbeelding

$$(4.14) \quad w = \exp \frac{\pi z}{a} \quad (a > 0)$$

voert de strook $0 < y < a$ over in het bovenhalfvlak $v > 0$ (zie fig. 4.2).

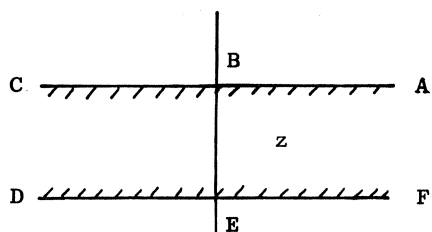
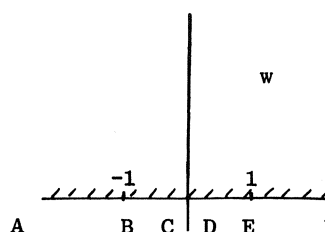


fig. 4.2



De afbeelding

$$(4.15) \quad w = \sin \frac{\pi z}{a} \quad (a > 0)$$

voert de halve strook $-\frac{1}{2}a < x < \frac{1}{2}a$, $y > 0$ over in het bovenhalfvlak $v > 0$ (zie fig. 4.3).

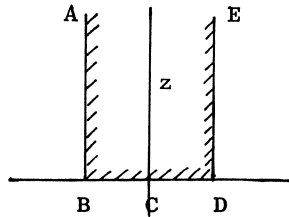
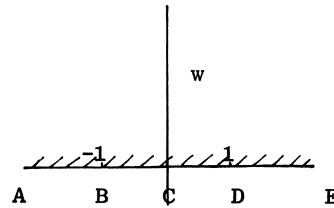


fig. 4.3



De afbeelding

$$(4.16) \quad w = \frac{1}{2}a\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

voert het gebied bepaald door $y > 0$ voor $|x| > 1$ en $y > \sqrt{1 - x^2}$ voor $|x| < 1$ over in het bovenhalfvlak $v > 0$ (zie fig. 4.4).

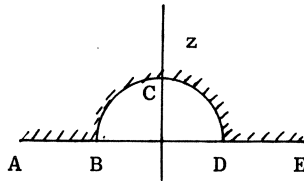
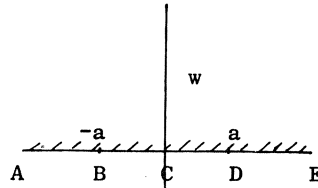


fig. 4.4



De conforme afbeelding van het inwendige van een polygoon op het bovenhalfvlak $v > 0$ kan op de volgende door Schwarz en Christoffel (1864-1869) aangegeven wijze expliciet gerealiseerd worden.

We gaan uit van een veelhoek $A_1 A_2 \dots A_m$ waarvan de hoekpunten volgens de positieve oriëntatie genummerd zijn. De corresponderende inwendige hoeken zijn $\alpha_1 \pi$, $\alpha_2 \pi$, ..., $\alpha_m \pi$ met $0 < \alpha_j < 2$ (zie fig. 4.5 voor $m = 4$).

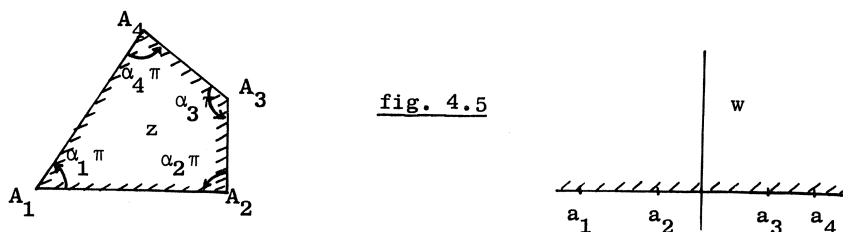


fig. 4.5

We nemen aan dat door de afbeeldingsfunctie $w = f(z)$ de punten A_1, A_2, \dots, A_m overgaan in de punten a_1, a_2, \dots, a_m van de reële as, waarbij $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Drie van deze punten kunnen willekeurig voorgeschreven worden. Door deze keus is $f(z)$ en zijn de overige punten a_j vastgelegd.

De afbeeldingsfunctie is dan bepaald door

$$(4.17) \quad \frac{dw}{dz} = A(w - a_1)^{1-\alpha_1} (w - a_2)^{1-\alpha_2} \dots (w - a_m)^{1-\alpha_m}.$$

De constante A is door de gegevens eveneens vastgelegd. De expliciete berekening van A en de niet voorgeschreven a_j is i.h.a. gecompliceerd, tenzij het gegeven polygoon een behoorlijke graad van symmetrie bezit. Zoals uit (4.17) blijkt is de afbeeldingsfunctie zelf i.h.a. van nogal ingewikkelde aard en is de inverse afbeeldingsfunctie van een eenvoudiger structuur.

Voorbeeld 4.4

De afbeeldingsfunctie

$$(4.18) \quad w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad 0 < k < 1,$$

een zgn. elliptische integraal, transformeert het bovenhalfvlak $y > 0$ in een rechthoek.

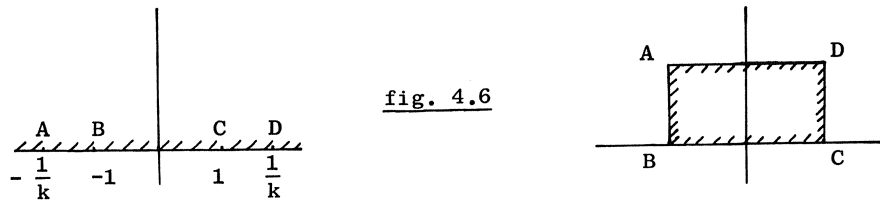


fig. 4.6

De afbeelding van rechthoek op bovenhalfvlak wordt geleverd door een elliptische functie, de inverse van de elliptische integraal (4.18).

De formule van Schwarz en Christoffel kan ook gebruikt worden op een open polygoon, d.w.z. een polygoon als boven maar waarbij een der hoekpunten het oneindig verre punt is.

Hoewel de stelling van Riemann niets zegt over meervoudig samenhange gebieden kunnen we soms toch op eenvoudige wijze een conforme afbeelding tot stand brengen, maar wel moeten we bedacht zijn op complicaties als singulariteiten, vertakkingspunten etc.

Door de afbeelding

$$(4.19) \quad w = \frac{1}{z}$$

wordt het buitengebied van de eenheidscirkel $|z| > 1$ afgebeeld op het binnengebied van de eenheidscirkel $|w| < 1$.

Door de afbeelding $f(z) = i(1+z)/(1-z)$, welke het binnengebied $|z| < 1$ afbeeldt op het bovenhalfvlak $v > 0$ te combineren met de voorafgaande afbeelding verkrijgen we de transformatie

$$(4.20) \quad w = i \frac{z+1}{z-1}$$

welke het buitengebied $|z| > 1$ overvoert in $v > 0$ (zie fig. 4.7).

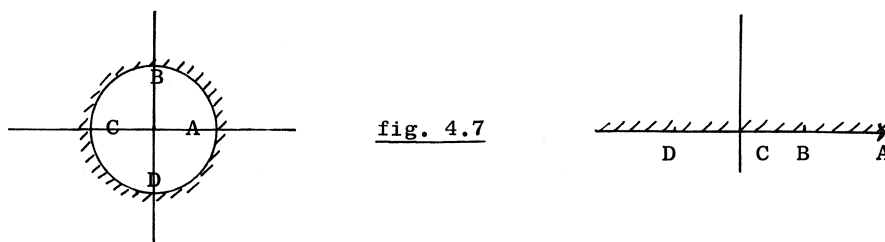


fig. 4.7

Teneinde een afbeelding van een ring $a < |z| < b$ op bijv. het bovenhalfvlak te verkrijgen is het noodzakelijk de meervoudige samenhang van de ring tot een enkelvoudige te reduceren door bijv. een coupure aan te brengen alvorens de afbeelding uitgevoerd kan worden.

Aldus voert de afbeeldingsfunctie

$$(4.21) \quad w = \ln z$$

de ring $a < |z| < b$ over in de rechthoek met hoekpunten $w = \ln a + \pi i$, $w = \ln b + \pi i$. De meerwaardigheid van de logaritmische noodzaakt in de ring op de negatief reële z -as een coupure aan te brengen als geïllustreerd in fig. 4.8.

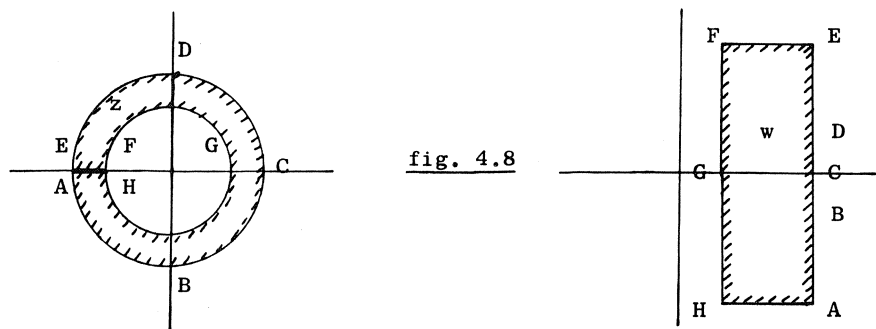


fig. 4.8

5. Bronnen en putten

We beschouwen in een ruimtelijk scalair veld $u(x,y,z)$ een gericht oppervlakteelement $d\sigma$ met eenheidsnormaal \vec{n} . We noemen dan $-\vec{n} \cdot \nabla u \, d\sigma$ de stroming of flux door het oppervlakteelement. Onder de stroming door het al of niet gesloten oppervlak S verstaan we dan de oppervlakte-integraal

$$(5.1) \quad - \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

Wordt de ruimte door een gesloten oppervlak in een binnengebied D en een buitengebied verdeeld, en is \vec{n} de naar buiten gerichte normaal dan stelt (5.1) een naar buiten gerichte stroming voor. De genoemde uitdrukking welke volgens de stelling van Gauss (1.13) gelijk is aan

$$(5.2) \quad - \iiint_D \Delta u \, d\tau$$

zouden we de productiviteit van D kunnen noemen.

Passen we deze begrippen toe op het veld

$$(5.3) \quad u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dan is volgens lemma 2.1 de productiviteit nul voor elk gebied dat de oorsprong niet bevat. Voor een bolvormig gebied $x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2$ verliest (5.2) zijn betekenis omdat Δu in de oorsprong niet gedefiniëerd is. Wel blijft (5.1) geldig, en zonder moeite volgt voor de productiviteit

$$- \iint \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \, d\sigma = 4\pi.$$

Dit resultaat geldt voor elke bol om de oorsprong, hoe klein ook, en dus ook voor elk willekeurig de oorsprong omsluitend gebied.

We zeggen dat het veld (5.3) in de oorsprong een bron bevat van de sterkte 4π . De gehele productiviteit van het veld is gelocaliseerd in deze ene bron. Een bron met een negatieve sterkte heet een put.

Met de schrijfwijze voor de distributies of gegeneraliseerde functies kunnen we het gevondene samenvatten als

$$(5.4) \quad \Delta \frac{1}{R} = -4\pi \delta(P, P_0),$$

waarbij R de in lemma 2.1 gegeven afstandsfunctie PP_0 is. De distributie $\delta(P, P_0)$, een zgn. functie van Dirac, is gekarakteriseerd door de eigenschap dat voor elke toetsfunctie $\phi(P)$ - een voldoende gladde functie, bijv. een die twee maal continu differentiëerbaar is - het volgende geldt

$$(5.5) \quad \iiint \phi(P) \delta(P, P_0) d\tau = \phi(P_0).$$

In overeenstemming met (5.2) drukt de vergelijking (5.4) uit dat het veld R^{-1} een in $P_0(x_0, y_0, z_0)$ gelocaliseerde productiviteit van de sterkte 4π bezit.

In twee dimensies worden de begrippen van stroming en productiviteit op analoge wijze ingevoerd. Toepassing op het veld

$$(5.6) \quad u = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

geeft wederom een in één punt geconcentreerde productiviteit en wel blijkt de oorsprong een bron van de sterkte 2π te zijn. Inderdaad geldt voor een cirkel met straal ρ om de oorsprong als middelpunt

$$-\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{r} ds = 2\pi,$$

welk resultaat eveneens onafhankelijk van ρ is.

Analoog aan (5.4) geldt in twee dimensies voor de afstandsfunctie

$$PP_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$(5.7) \quad \Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi \delta(P, P_0).$$

In twee dimensies kan men gebruik maken van de theorie van de complexe analytische functies. Aldus correspondeert de harmonische functie $\ln r$ met de complexe functie $\ln z$ waarvan hij het reële deel is.

In het complexe vlak wordt een bron van de sterkte 1 derhalve beschreven door een logaritmische singulariteit

$$(5.8) \quad -\frac{1}{2\pi} \ln(z - z_0).$$

De meerwaardigheid van deze functie stoort niet omdat we doorgaans alleen met het reële deel, dat wel eenwaardig is, te maken hebben.

Voorbeeld 5.1

Gevraagd wordt een functie $u(x,y)$ welke in het bovenhalfvlak $y > 0$ harmonisch is en een bron van de sterkte 1 op de plaats $(0,1)$ bezit, terwijl voor $y = 0$ voldaan is aan $u = 0$. Dit probleem van Dirichlet kan dus beschreven worden door

$$(5.9) \quad \begin{cases} \Delta u = -\delta(x)\delta(y-1) & \text{voor } y > 0 \\ u = 0 & \text{voor } y = 0. \end{cases}$$

In complexe taal zoeken we naar een analytische functie van het type

$$w = -\frac{1}{2\pi} \ln(z-i) + w',$$

waarbij w' in het bovenhalfvlak regulier is, terwijl $\operatorname{Re} w = 0$ voor $y = 0$. Symmetrieoverwegingen doen als oplossing meteen

$$w' = \frac{1}{2\pi} \ln(z+i)$$

aan de hand, d.w.z. een bron bij $(0,1)$ en een put bij $(0,-1)$. In complexe vorm is dus

$$w = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{z-i}{z+i}$$

een oplossing die aan de gestelde eisen voldoet. De gezochte harmonische functie is dan

$$(5.10) \quad u(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-i}{z+i} \right|.$$

Voorbeeld 5.2

Gevraagd wordt een functie $u(x,y)$ welke binnen de eenheidscirkel harmonisch is, op de plaats $(a,0)$ met $0 < a < 1$ een bron van de sterkte 1 bezit en op de eenheidscirkel verdwijnt.

Dit probleem van Dirichlet kan worden geformuleerd als

$$(5.11) \quad \begin{cases} \Delta u = -\delta(x-a)\delta(y) & \text{voor } x^2 + y^2 < 1 \\ u = 0 & \text{voor } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

De overeenkomstige complexe functie is van het type

$$w = -\frac{1}{2\pi} \ln(z-a) + w',$$

terwijl

$$\operatorname{Re} w = 0 \quad \text{voor} \quad |z| = 1.$$

Analoge symmetrieoverwegingen leiden tot de oplossing

$$w = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{z-a}{az-1},$$

hetgeen wil zeggen dat tegenover de bron $(a,0)$ in het inverse punt $(a^{-1},0)$ een put geplaatst is. De eenheidscirkel kan worden opgevat als een cirkel van Apollonius voor de punten $(a,0)$ en $(a^{-1},0)$ met de eigenschap

$$\left| \frac{z-a}{z-a^{-1}} \right| = a \quad \text{voor} \quad |z| = 1,$$

zodat inderdaad $\operatorname{Re} w = 0$ op de eenheidscirkel.

De gezochte harmonische functie is dus

$$(5.12) \quad u(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-a}{az-1} \right|.$$

Deze oplossing is eenduidig omdat vooreen begrensde gebied een eenduidigheidsbewijs van het probleem van Dirichlet geleverd is.

Kiezen we i.p.v. de puntbron $(a,0)$ iets algemener het punt (x_0, y_0) dan vinden we dat

$$(5.13) \quad \begin{cases} \Delta G = \delta(P, P_0) & \text{voor } x^2 + y^2 < 1 \\ G = 0 & \text{voor } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

opgelost wordt door

$$(5.14) \quad G(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{\bar{z} \bar{z}_0 - 1} \right| .$$

Deze laatste functie staat bekend als de functie van Green voor het probleem van Dirichlet van de eenheidscirkel.

6. Green'se functies

We beschouwen het probleem van Dirichlet bij de vergelijking van Poisson voor een begreind gebied D in twee of drie dimensies

$$(6.1) \quad \begin{cases} \Delta u = h & \text{in } D, \\ u = f & \text{op } \partial D. \end{cases}$$

Er zijn twee belangrijke methoden waarmee dit probleem opgelost of tot een eenvoudiger probleem gereduceerd kan worden.

Methode 1

We zoeken naar een particuliere oplossing u_1 die wel aan de vergelijking $\Delta u_1 = h$ voldoet, maar die niet aan de randvoorwaarde behoeft te voldoen. Stellen we nu $u = u_1 + u_2$ dan is u_2 een oplossing van de vergelijking van Laplace $\Delta u_2 = 0$ voor welke aan de rand $u_2 = f - u_1$ geldt. Hierdoor is de oplossing van (6.1) in feite gereduceerd tot die van het overeenkomstige probleem met $h \equiv 0$.

Voorbeeld 6.1

Bij het tweedimensionale probleem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 8x & \text{voor} & \quad x^2 + y^2 < 1, \\ u &= 0 & \text{voor} & \quad x^2 + y^2 = 1; \end{aligned}$$

is $u_1 = \frac{4}{3} x^3$ een geschikte keuze. Stellen we $u = u_1 - v$ dan voldoet v aan

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \\ v &= \frac{4}{3} \cos^3 \phi & \text{voor} & \quad x = \cos \phi, y = \sin \phi, \end{aligned}$$

waarbij overgegaan wordt op poolcoördinaten (r, ϕ) .

Volgens de formule van Poisson (3.15) kunnen we de oplossing hiervan expliciet schrijven als

$$v = \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \cos^3 (\theta + \phi) d\theta.$$

Wegens

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta$$

en

$$4 \cos^3 \theta = 3 \cos \theta + \cos 3\theta$$

vinden we gemakkelijk op grond van de orthogonaliteitseigenschappen van de optredende goniometrische functies

$$v = r \cos \phi + \frac{1}{3} r^3 \cos 3\phi = x + \frac{1}{3} x^3 - xy^2.$$

De oplossing van het oorspronkelijke probleem is dus

$$u = x(x^2 + y^2 - 1).$$

Methode 2

Hierbij maken we gebruik van een zogenaamde functie van Green $G(P, P_0)$ welke voldoet aan

$$(6.2) \quad \begin{cases} \Delta G = \delta(P, P_0) & \text{in } D, \\ G = 0 & \text{op } \partial D. \end{cases}$$

Dit is dus een functie welke afgezien van een singulariteit in P_0 harmonisch is en op de rand van D verdwijnt.

Passen we op de gevraagde oplossing u en op G de stelling van Green toe, bijv. in de driedimensionale versie de formule (1.12), dan vinden we

$$\begin{aligned} & \int_D \{u(P) \Delta G(P, P_0) - G(P, P_0) \Delta u(P)\} dP = \\ & = \int_{\partial D} \left\{ u(P) \frac{\partial}{\partial n} G(P, P_0) - G(P, P_0) \frac{\partial}{\partial n} u(P) \right\} dP, \end{aligned}$$

zodat

$$(6.3) \quad u(P_0) = \int_D h(P) G(P, P_0) dP + \int_{\partial D} f(P) \frac{\partial}{\partial n} G(P, P_0) dP.$$

Alleen voor gebieden met een enkelvoudige symmetrie lukt het, bijv. met gebruikmaking van het zogenaamde spiegelingprincipe, een expliciete uitdrukking voor de functie van Green af te leiden.

Daar voor een begrensde gebied het probleem van Dirichlet eenduidig is, is er in zo'n gebied ook slechts één functie van Green, aangenomen althans dat de existentie vaststaat. Voor een onbegrensd gebied kan men door een passende voorwaarde voor het gedrag in het oneindige eveneens tot eenduidigheid besluiten. Dit zal later ter sprake komen. De functie van Green kan men ook beschrijven door de soort singulariteit vast te leggen d.m.v.

$$(6.4) \quad G(P, P_0) = \frac{-1}{4\pi PP_0} + \text{reguliere functie}$$

in drie dimensies, en door

$$(6.5) \quad G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \ln PP_0 + \text{reguliere functie}$$

in twee dimensies.

In verband met (5.4) en (5.7) is dit een aequivalente manier om tot uitdrukking te brengen dat de functie van Green in zijn singulariteit een eenheidsput heeft.

Stelling 6.1

De functie van Green is symmetrisch, d.w.z.

$$(6.6) \quad G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1).$$

Bewijs:

We passen de stelling van Green toe op de Green'se functies $G(P, P_1)$ en $G(P, P_2)$, waarbij P_1 en P_2 natuurlijk verschillende punten zijn. Aangezien beide functies op ∂D verdwijnen geldt

$$\int \{G(P, P_2) \Delta G(P, P_1) - G(P, P_1) \Delta G(P, P_2)\} dP = 0,$$

zodat

$$\int G(P, P_2) \delta(P, P_1) dP = \int G(P, P_1) \delta(P, P_2) dP$$

en dus

$$G(P_1, P_2) = G(P_2, P_1).$$

In voorbeeld 5.2 hebben we een oplossing gevonden van het probleem van Dirichlet voor de eenheidscirkel, waarbij de functie van Green met gebruikmaking van de complexe schrijfwijze geschreven kan worden als (5.14). Toepassing van (6.3) geeft dan een tweede afleiding van de formule van Poisson

$$u(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left\{ \frac{\partial}{\partial r_0} \ln \left| \frac{z - z_0}{\bar{z} \bar{z}_0 - 1} \right| \right\}_{r_0=1} d\theta,$$

waarbij $z = re^{i\phi}$ en $z_0 = r_0 e^{i\phi_0}$. Uitwerking leidt snel tot de bekende gedaante van (3.15).

Voorbeeld 6.2

De Green'se functie voor het probleem van Dirichlet van de eenheidsbol kan evenals bij het tweedimensionale analogon met behulp van het spiegelingsprincipe gevonden worden. Naast de put in P_0 voeren we op de voerstraal OP_0 een bron in het inverse punt P_1 in, waarbij invers wil zeggen dat $OP_0 \cdot OP_1 = 1$. De eenheidsbol kunnen we opvatten als een bol van Apollonius, d.w.z. als de verzameling van de punten P waarvoor

$$\frac{PP_0}{PP_1} = r_0 \quad (= OP_0).$$

Volgens (5.4) en (6.4) kan de Green'se functie nu onmiddellijk neergeschreven worden als

$$(6.7) \quad G(P, P_0) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{PP_0} - \frac{r_0^{-1}}{PP_1} \right).$$

Nu deze Green'se functie expliciet bekend is kan door toepassing van (6.3) het driedimensionale analogon van de formule (3.15) van Poisson afgeleid worden.

Bij de behandeling van het probleem van Neumann voor een, zoals tot dusverre steeds, begrensde gebied is er de moeilijkheid dat het overeenkomstige probleem voor de functie van Green

$$(6.8) \quad \begin{cases} \Delta G = \delta(P, P_0) & \text{in } D, \\ \frac{\partial G}{\partial n} = 0 & \text{op } \partial D; \end{cases}$$

onoplosbaar is omdat de stelling van Gauss (1.13) hiermede in strijd is. In meer logische taal uitgedrukt kunnen we zeggen dat een put zonder flux onmogelijk is.

Het randwaardeprobleem

$$(6.9) \quad \begin{cases} \Delta u = h & \text{in } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f & \text{op } \partial D; \end{cases}$$

is dan ook alleen oplosbaar indien voldaan is aan de zogenaamde compatibiliteitsvoorwaarde

$$(6.10) \quad \int_D h(P) \, dP = \int_{\partial D} f(P) \, dP,$$

zoals onmiddellijk uit dezelfde stelling van Gauss volgt.

Wel kan men een soort Green'se functie construeren welke binnen D zowel een put als een bron bezit.

Voorbeeld 6.3

Voor de eenheidscirkel kan men een Green'se functie maken door superpositie van een put in P_0 , een even grote bron in de oorsprong en een put in het inverse punt P_1 , namelijk

$$(6.11) \quad G = \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln |z - z_0| - \ln |z| + \ln |\bar{z} \bar{z}_0 - 1| \right\}.$$

Inderdaad geldt voor $z = e^{i\phi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{d}{dz} \ln \frac{(z - z_0)(\bar{z} \bar{z}_0 - 1)}{z} \cdot e^{i\phi} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{z_0}{e^{i\phi} - z_0} + \frac{\bar{z}_0 e^{i\phi}}{e^{i\phi} \bar{z}_0 - 1} \right\} = 0. \end{aligned}$$

7. Randwaardeproblemen voor onbegrensde gebieden

Indien een harmonische functie beschouwd wordt voor een zich naar het oneindige uitstrekkend gebied moet voor een eenduidige vastlegging van de oplossing van bijv. het probleem van Dirichlet iets over het gedrag van de oplossing in het oneindig verre geeist worden.

Voorbeeld 7.1

Een tweedimensionale functie welke harmonisch in het bovenhalfvlak $y > 0$ is en voor $y = 0$ verdwijnt kan geschreven worden als $F(x + iy) - F(x - iy)$ waarbij $F(z)$ een gehele analytische functie is. De keuzen z , z^2 , z^3 , e^z , $\sin z$ leiden tot de oplossingen y , xy , $3x^2y - y^3$, $e^x \sin y$, $\cos x$ chy.

Opdat het probleem van Dirichlet eenduidig oplosbaar is, moet het stelsel $\Delta u = 0$ in D en $u = 0$ op ∂D slechts de nul-oplossing bezitten. Aangezien een harmonische functie in een begreemd gebied zijn extrema op de rand aanneemt, is het voldoende om als extra eis

$$u(P) \rightarrow 0 \quad \text{voor} \quad P \rightarrow \infty$$

te stellen. Men kan dit inzien door het probleem van Dirichlet te beschouwen voor de doorsnede van D met een willekeurig grote bol die de oorsprong tot middelpunt heeft.

Voorbeeld 7.2

We beschouwen het probleem van Dirichlet voor het bovenhalfvlak $y > 0$

$$(7.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{voor } y > 0, \\ u = f(x) & \text{voor } y = 0. \end{cases}$$

We nemen hierbij aan dat $f(x)$ continu is en voor $|x| \rightarrow \infty$ verdwijnt. In overeenstemming met voorbeeld 5.1 levert

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$$

de Green'se functie van het probleem.

Toepassing van (6.3) levert meteen de verlangde oplossing

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \frac{i}{x - \bar{z}_0} - \frac{i}{x - z_0} \right\} dx,$$

of na enige omvorming

$$(7.2) \quad u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

Men kan zich er gemakkelijk van overtuigen dat voor $y \rightarrow 0$ inderdaad $u \rightarrow f(x)$. Substitutie van $t \rightarrow yt + x$ ($y > 0$) geeft immers

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+yt)}{t^2 + 1} dt \rightarrow f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = f(x).$$

Voorbeeld 7.3

Het probleem van Dirichlet voor het buitengebied van de eenheidscirkel

$$(7.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{voor } x^2 + y^2 > 1 \\ u = f(\theta) & \text{voor } x = \cos \phi, y = \sin \phi \end{cases}$$

kan op dezelfde wijze opgelost worden als het overeenkomstige probleem voor het binnengebied. De Green'se functie is dezelfde als die voor het binnengebied. Toepassing van (6.3) levert dan weer de formule van Poisson, althans op het teken na omdat de eenheidsnormaal aan de cirkel nu de andere kant uit wijst. We vinden derhalve met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$(7.4) \quad u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 - 2r \cos(\theta - \phi) + 1} f(\theta) d\theta.$$

Bij dit laatste probleem, een zogenaamd uitwendig randwaardeprobleem d.w.z. een waarbij het complement van D begrensd is, constateren we dat in het oneindige de oplossing $u(x,y)$ i.h.a. niet verdwijnt, maar wel begrensd blijft. De eenduidigheid van deze oplossing staat nog

niet vast, maar geldt wel zoals volgt uit onderstaande stelling.

Stelling 7.1

Het probleem van Dirichlet voor het complement van een begrensd gebied

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{in } D, \quad u = 0 \quad \text{op } \partial D, \\ u \text{ uniform begrensd voor } (x,y) \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

heeft slechts de nul-oplossing.

Bewijs:

Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat de eenheidscirkel binnen het complement van D ligt, en dat overal $|u| \leq 1$ geldt. We omsluiten het complement van D door een willekeurig grote cirkel $r = R$ aangeduid door C . Naast u met $u = 0$ op ∂D en $|u| \leq 1$ op C beschouwen we de harmonische functie $v = \ln r / \ln R$ waarvoor $v \geq 0$ op ∂D en $v = 1$ op C . De harmonische functies $v \pm u$ zijn op de door ∂D en C gevormde rand niet-negatief. Op grond van het maximum- (of hier liever minimum-) principe is dan ook in het erdoor begrensde ringvormige gebied $v \pm u \geq 0$. We vinden dus de schatting

$$|u| \leq \ln r / \ln R$$

geldig voor alle $r \geq 1$ en alle voldoende grote R . Voor $R \rightarrow \infty$ volgt het gestelde.

8. Scheiding van de variabelen

De methode om oplossingen van randwaardeproblemen op te bouwen uit speciale oplossingen waarbij de onafhankelijk veranderlijken optreden lichten we toe aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 8.1

Men vraagt een tweedimensionale harmonische functie $u(x,y)$ te bepalen voor de half-oneindige strook $0 < x < 1, y > 0$ waarbij op de rand de volgende randvoorwaarden gelden

$$(8.1) \quad u = 0 \quad \text{voor} \quad x = 0 \quad \text{en} \quad x = 1,$$

$$(8.2) \quad \begin{cases} u = 1 & \text{voor} \quad y = 0, \\ u \rightarrow 0 & \text{voor} \quad y \rightarrow \infty. \end{cases}$$

We beginnen met speciale oplossingen van $\Delta u = 0$ te zoeken van de vorm $F(x)G(y)$. Substitutie in de potentiaalvergelijking geeft $F''G + FG'' = 0$, of na deling door FG

$$(8.3) \quad \frac{F''}{F} = - \frac{G''}{G}.$$

Aangezien van deze gelijkheid het linkerlid alleen van x en het rechterlid alleen van y afhangt moeten beide leden gelijk zijn aan een reële of complexe constante, zeg $-\lambda^2$. We kunnen dan

$$(8.4) \quad F = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$$

combineren met

$$(8.5) \quad G = C'_1 e^{-\lambda y} + C'_2 e^{\lambda y}.$$

In het gegeven probleem kunnen de speciale oplossingen zonder moeite aan de randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = 1$ aangepast worden. Dit leidt tot de keuze

$$F = C \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Wat betreft de randvoorwaarden bij $y = 0$ en $y = \infty$ kan alleen de voor-

waarde in het oneindige in rekening gebracht worden. De keuze is nu beperkt tot

$$G = C' e^{-n\pi y}.$$

Als resultaat beschikken we nu over een aftelbare reeks van speciale harmonische functies

$$(8.6) \quad u_n = \sin n\pi x \exp -n\pi y, \quad n = 1, 2, \dots$$

welke afgezien van de randvoorwaarde bij $y = 0$ aan de gestelde eisen voldoen. Aangezien zowel de differentiaalvergelijking als de gebruikte randvoorwaarden lineair en homogeen zijn is ook het lineaire compositum

$$(8.7) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \exp -n\pi y$$

met onbepaalde coëfficiënten een oplossing van het probleem. De kunst is nu door een juiste keuze van de genoemde coëfficiënten aan de nog ontbrekende randvoorwaarde te voldoen. Nemen we even algemener aan dat $u = f(x)$ voor $y = 0$ dan betekent dit dat

$$(8.8) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x,$$

zodat het probleem uiteindelijk berust op de bepaling van de Fourier coëfficiënten van een Fourier reeks. Zoals bekend mag worden verondersteld zijn de coëfficiënten a_n gegeven door de formule

$$a_n = 2 \int_0^1 f(t) \sin n\pi t \, dt.$$

In dit voorbeeld is $f(x) = 1$ gekozen, zodat

$$a_n = 2 \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}.$$

De gevraagde oplossing wordt dus

$$(8.9) \quad u = \frac{4}{\pi} \sum' \frac{\sin n\pi x}{n} e^{-n\pi y},$$

met sommatie over de oneven indices.

We merken hierbij op dat deze reeks voor $y \geq \varepsilon > 0$ uniform convergeert en dat ditzelfde geldt voor alle afgeleiden zodat de reeks inderdaad een oplossing van de vergelijking van Laplace is welke aan de randvoorwaarden bij $x = 0$, $x = 1$ en $y = \infty$ voldoet. Uniforme convergentie in de omgeving van $y = 0$ is uitgesloten wegens de discontinuïteit van u op de rand bij $(0,0)$ en $(1,0)$. Wel geldt $\lim u(x,y) = 1$ voor $y \rightarrow +0$, $0 < x < 1$.

De boven beschreven methode lukt bij gebruik van Cartesische coördinaten (x,y) alleen bij rechthoekige gebieden en dan nog slechts wanneer een deel der randvoorwaarden van homogene aard is.

We onderscheiden t.a.v. het gebied de volgende gevallen

- a. rechthoek $0 < x < a$, $0 < y < b$;
- b. half-oneindige strook $0 < x < a$, $0 < y < \infty$;
- c. kwartvlak $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$;
- d. halfvlak $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$.

Zijn hierbij met betrekking tot x de randvoorwaarden homogeen dan kunnen we als boven weer speciale oplossingen van het type (8.6), d.w.z.

$$\phi(x, \lambda) \psi(y, \lambda)$$

construeren waarbij $\phi(x, \lambda)$ aan de voor x geldende randvoorwaarden voldoet. Deze eis legt aan λ een beperking op. Indien het x -interval begrensd is zoals in de gevallen a en b doorloopt λ een aftelbare rij waarden. De functies $\phi(x, \lambda)$ vormen een rij van het Fourier type. Analoog aan (8.7) stellen we de algemene oplossing op in de vorm

$$u = \sum_{\lambda} \phi(x, \lambda) \psi(y, \lambda)$$

of iets meer expliciet

$$(8.10) \quad u = \sum_{\lambda} \phi(x, \lambda) (a_n e^{-\lambda y} + b_n e^{\lambda y})$$

met twee rijen coëfficiënten $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$. Op analoge wijze als in het behandelde voorbeeld leiden de randvoorwaarden met betrekking tot y tot de bepaling van deze coëfficiënten.

In het geval \underline{c} en ook bij \underline{d} doorloopt λ een continuum van waarden. De ontwikkeling heeft nu het karakter van een Fourier integraal. In plaats van (8.10) komt er iets als

$$(8.11) \quad u = \int \{a(\lambda)e^{-\lambda y} + b(\lambda)e^{\lambda y}\} \phi(x, \lambda) d\lambda.$$

In de onderstaande voorbeelden zullen een aantal typische gevallen behandeld worden.

Voorbeeld 8.2

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in} && 0 < x < \pi, \quad 0 < y < b, \\ u &= 1 && \text{voor} && x = 0 \quad \text{en} \quad x = \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 && \text{voor} && y = 0, \\ u &= 2 && \text{voor} && y = b. \end{aligned}$$

Bij dit gemengde randwaardeprobleem zijn de randvoorwaarden bij $x = 0$ en $x = \pi$ niet homogeen zodat het boven beschreven superpositiebeginsel niet zonder meer lukt. We stellen evenwel $u = u_0 + v$ waarbij $\Delta u_0 = 0$ en $u_0 = 1$ voor $x = 0$ en $x = \pi$. Kunnen we een of andere u_0 vinden die hieraan voldoet dan zijn voor v de randvoorwaarden wel homogeen. De eenvoudigste keus is $u_0 = 1$. Voor de speciale oplossingen kunnen we schrijven $\sin nx \exp \pm ny$, $n = 1, 2, \dots$. Het lukt ook nog aan de, homogene, randvoorwaarde bij $y = 0$ te voldoen door de keuze $\sin nx \cosh ny$. De oplossing van het gestelde probleem stellen we dan op in de vorm

$$u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \cosh ny.$$

De resterende randvoorwaarde komt weer neer op het bepalen van de coëfficiënten van een Fourier reeks. Men heeft namelijk

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh nb \sin nx,$$

zodat

$$a_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi \cosh nb}.$$

Voorbeeld 8.3

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in} && 0 < x < \infty, 0 < y < \infty, \\ u &= 0 && \text{voor} && x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -f(x) && \text{voor} && y = 0, \\ u &\rightarrow 0 && \text{voor} && x, y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Voor de speciale oplossingen kunnen we $\sin \lambda x \exp -\lambda y$ kiezen. Deze voldoen alvast aan de randvoorwaarde bij $x = 0$ en hebben het gewenste gedrag voor $y \rightarrow \infty$.

De gevraagde oplossing poneren we nu in de vorm

$$u = \int_0^\infty a(\lambda) \sin \lambda x e^{-\lambda y} d\lambda.$$

De randvoorwaarde bij $y = 0$ vereist

$$f(x) = \int_0^\infty \lambda a(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

Volgens de theorie van de Fourier integralen volgt hieruit onmiddellijk

$$\lambda a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin \lambda t dt,$$

waarmede $a(\lambda)$ in feite bekend is. Hoewel het probleem nu in zekere zin opgelost is kunnen we de gevonden oplossing, te weten

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(t) \sin \lambda t dt \right\} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} e^{-\lambda y} d\lambda$$

nog wat verder uitwerken. Verwisselen we de integratievolgorde en maken we gebruik van de formule

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} e^{-\lambda y} d\lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + (t+x)^2}{y^2 + (t-x)^2},$$

dan vinden we

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(t) \ln \frac{y^2 + (t+x)^2}{y^2 + (t-x)^2} dt,$$

een voorstelling van het Poisson type. Hoewel de afleiding van dit resultaat geheel formeel is, zonder dat gelet is op de geldigheid van de diverse bewerkingen, kan men zich achteraf gemakkelijk van de juistheid van het gevonden resultaat overtuigen.

9. Bessel functies

De ruimtelijke vergelijking van Laplace kan in cylinder coördinaten (r, θ, z) - van de Cartesische coördinaten x, y, z zijn dus x en y vervangen door poolcoördinaten - volgens (3.3) geschreven worden als

$$(9.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Tracht men hiervan speciale oplossingen te vinden van de vorm

$$(9.2) \quad u = f(r) e^{i\mu\theta + cz},$$

dan voldoet $f(r)$ aan de gewone differentiaalvergelijking

$$(9.3) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\sigma^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) f = 0,$$

de zogenaamde differentiaalvergelijking van Bessel. Aangezien we in (9.3) σ als nieuwe variabele i.p.v. r mogen kiezen kan in (9.3) zonder verlies van algemeenheid $\sigma = 1$ genomen worden. De oplossingen van de Besselvergelijking

$$(9.4) \quad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(1 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) f = 0, \quad \mu \geq 0$$

kunnen opgebouwd worden uit de twee standaardoplossingen $J_\mu(r)$ en $Y_\mu(r)$. De eerste functie is gekarakteriseerd door zijn begrensdheid voor $r = 0$. De tweede functie, die de functie van Neumann wordt genoemd, is onbegrensd bij $r = 0$.

Voor $J_\mu(r)$ kan men zonder moeite een machtreeks afleiden. Substitutie van

$$J_\mu(r) = r^\mu \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

in (9.4) leidt tot de volgende recurrente betrekking voor de coëfficiënten c_n

$$\{(\mu + n)^2 - \mu^2\} c_n + c_{n-2} = 0, \quad n \geq 2,$$

met aan het begin de voorwaarde

$$\{(\mu + 1)^2 - \mu^2\}c_1 = 0.$$

Hieraan is o.a. voldaan door

$$c_{2m} = \frac{(-4)^{-m}}{m! \Gamma(\mu + m + 1)}, \quad c_{2m+1} = 0 \quad (m=0,1,2,\dots).$$

In overeenstemming hiermede wordt de eerste functie van Bessel gedefiniëerd als

$$(9.5) \quad J_\mu(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\mu + n + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{\mu+2n}.$$

Men overtuigt zich gemakkelijk van de convergentie van deze reeks voor alle waarden van r . De definitie van $J_\mu(r)$ kan met (9.5) uitgebreid worden tot complexe waarden van μ en r . Is in het bijzonder in (9.5) μ negatief en r positief reëel dan wordt eveneens een oplossing van (9.4) verkregen.

Anders gezegd zijn voor $\mu > 0$ zowel $J_\mu(r)$ als $J_{-\mu}(r)$ oplossingen van de vergelijking van Bessel. Is evenwel μ een geheel getal, zeg m , dan blijkt uit (9.5) dat

$$(9.6) \quad J_{-m}(r) = (-1)^m J_m(r).$$

Is μ niet een geheel getal dan zijn de oplossingen $J_\mu(r)$ en $J_{-\mu}(r)$ onafhankelijk.

De standaardoplossing van Neumann wordt gedefiniëerd als

$$(9.7) \quad Y_\mu(r) = \frac{\cos \mu\pi J_\mu(r) - J_{-\mu}(r)}{\sin \mu\pi}.$$

Deze definitie levert voor alle waarden van μ een tweede van $J_\mu(r)$ onafhankelijke functie. Voor $\mu = m = 0, 1, 2, \dots$ wordt het rechterlid van (9.7) opgevat als een limietovergang $\mu \rightarrow m$. In het bijzonder is

$$(9.8) \quad J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}$$

en

$$(9.9) \quad Y_0(r) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \left(\frac{r}{2} \right) + \gamma \right) J_0(r) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n! n!} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n}.$$

Voor kleine waarden van r gelden de benaderingen

$$(9.10) \quad J_0(r) = 1 - \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{64} r^4 - \dots$$

$$(9.11) \quad Y_0(r) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{r}{2} + \frac{2\gamma}{\pi} - \frac{r^2}{2\pi} \ln \frac{r}{2} + \dots, \quad \gamma = 0.5772\dots$$

Met behulp van (9.5) kan men gemakkelijk de volgende recurrente betrekkingen bewijzen

$$(9.12) \quad J_{\mu-1}(r) + J_{\mu+1}(r) = \frac{2\mu}{r} J_{\mu}(r),$$

$$(9.13) \quad J_{\mu-1}(r) - J_{\mu+1}(r) = 2 J'_{\mu}(r).$$

Uit (9.13) volgt in het bijzonder voor $\mu = 0$ met gebruikmaking van (9.6)

$$(9.14) \quad J'_0(r) = -J_1(r).$$

Uit (9.7) volgt dan analoog voor de functie van Neumann

$$(9.15) \quad Y'_0(r) = -Y_1(r).$$

Voor kleine waarden van r gelden de benaderingen

$$(9.16) \quad J_1(r) = \frac{1}{2} r - \frac{1}{16} r^3 + \frac{1}{384} r^5 - \dots,$$

$$(9.17) \quad Y_1(r) = -\frac{2}{\pi r} + \frac{r}{\pi} \ln \frac{r}{2} + \dots$$

Zonder bewijs vermelden we dat voor grote waarden van r de volgende benaderingen gelden

$$(9.18) \quad J_{\mu}(r) = \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(r - \frac{1}{2} \mu \pi - \frac{1}{4} \pi \right) + O(r^{-\frac{3}{2}}),$$

$$(9.19) \quad Y_{\mu}(r) = \left(\frac{2}{\pi r} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(r - \frac{1}{2} \mu \pi - \frac{1}{4} \pi \right) + O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

Hieruit blijkt dat deze Bessel functies kwalitatief op goniometrische functies lijken waarbij de "periode" ongeveer 2π is en waarbij de amplitude afneemt met $r^{-\frac{1}{2}}$.

In het bijzonder is $J_0(r)$ een oscillerende functie waarbij de eerste nulpunten a.v. zijn

$$\beta_1 = 2.405, \quad \beta_2 = 5.520, \quad \beta_3 = 8.654.$$

Bij een aantal randwaardeproblemen heeft men te maken met reeksontwikkelingen van het type

$$(9.20) \quad f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\beta_n r).$$

We merken hierbij op dat het stelsel functies $J_0(\beta_n r)$ orthogonaal is in de volgende zin

$$(9.21) \quad \int_0^1 r J_0(\beta_m r) J_0(\beta_n r) dr = 0,$$

zodat, althans formeel, de door (9.20) bepaalde coëfficiënten gegeven zijn door

$$(9.22) \quad a_n = \int_0^1 r J_0(\beta_n r) f(r) dr / \int_0^1 r J_0^2(\beta_n r) dr.$$

De orthogonaliteitsbetrekking (9.21) volgt gemakkelijk uit (9.3). Schrijven we $u_n = J_0(\beta_n r)$ dan geldt

$$u_m \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_n}{dr} \right) + \beta_n^2 r u_m u_n = 0$$

en

$$u_n \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_m}{dr} \right) + \beta_m^2 r u_m u_n = 0,$$

waaruit door aftrekking volgt

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^1 r u_m u_n dr = \int_0^1 \{u_m (r u_n')' - u_n (r u_m')'\} dr = (u_m u_n' - u_n u_m')_{r=1} = 0.$$

Voor $m \neq n$ is dus aan (9.21) voldaan.

Voor $m = n$ geldt voorts, wederom met gebruikmaking van (9.3),

$$\beta_n^2 \int_0^1 r u_n^2 dr = - \beta_n^2 \int_0^1 r^2 u_n u_n' dr = \int_0^1 r u_n' (r u_n')' dr = \frac{1}{2} \{u_n'(1)\}^2,$$

zodat

$$(9.23) \quad \int_0^1 r J_0^2(\beta_n r) dr = \frac{1}{2} \{J_0'(\beta_n)\}^2.$$

De coëfficiëntenformule (9.22) kan dus eenvoudiger a.v. geschreven worden

$$(9.24) \quad a_n = \frac{2}{J_1^2(\beta_n)} \int_0^1 r J_0(\beta_n r) f(r) dr.$$

De orthogonaliteitsrelatie (9.21) kan aanmerkelijk uitgebreid worden. Schrijven we even $u = J_\mu(\beta r)$ en $v = J_\mu(\gamma r)$ dan geldt op overeenkomstige wijze als boven

$$(\beta^2 - \gamma^2) \int_0^a r u v dr = \int_0^a \left\{ u \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - v \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \right\} dr = a \left(u \frac{dv}{dr} - v \frac{du}{dr} \right)_{r=a}.$$

Men heeft derhalve

$$(9.25) \quad \int_0^a r J_\mu(\beta r) J_\mu(\gamma r) dr = 0, \quad \beta \neq \gamma,$$

zodra

$$(9.26) \quad \gamma J_\mu(\beta a) J_\mu'(\gamma a) = \beta J_\mu(\gamma a) J_\mu'(\beta a).$$

Aan de relatie (9.26) is bijv. voldaan indien β en γ wortels zijn van $J_\mu(\beta a) = 0$ of van $J_\mu'(\beta a) = 0$.

Bij sommige randwaardeproblemen treft men de Bessel-vergelijking aan in de vorm

$$(9.27) \quad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \left(1 + \frac{\mu^2}{r^2}\right) f = 0, \quad \mu \geq 0.$$

In plaats van de oplossingen $J_\mu(ir)$ en $Y_\mu(ir)$ kiest men liever het volgende aequivalente tweetal

$$(9.28) \quad I_\mu(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(\mu + n + 1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{\mu+2n}$$

en

$$(9.29) \quad K_\mu(r) = \frac{1}{2} \pi \frac{I_{-\mu}(r) - I_\mu(r)}{\sin \mu\pi},$$

waarbij in de tweede formule voor gehele μ een limietovergang nodig is. In het bijzonder is

$$(9.30) \quad I_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = 1 + \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{64} r^4 + \dots,$$

$$(9.31) \quad K_0(r) = -(\ln \frac{r}{2} + \gamma) I_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n! n!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} =$$

$$= -\ln \frac{r}{2} - \gamma - \frac{1}{4} r^2 \ln \frac{r}{2} + \dots$$

Analoog aan (9.14) en (9.15) geldt

$$(9.32) \quad I'_0(r) = I_1(r), \quad K'_0(r) = -K_1(r).$$

Zonder bewijs vermelden we tenslotte de asymptotische benaderingen

$$(9.33) \quad I_\mu(r) \sim \frac{e^r}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 - \frac{4\mu^2 - 1}{8r} + \dots \right\}$$

en

$$(9.34) \quad K_\mu(r) \sim \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-r} \left\{ 1 + \frac{4\mu^2 - 1}{8r} + \dots \right\}.$$

Hieruit blijkt dat deze zogenaamde gemodificeerde Bessel functies kwalitatief zich gedragen als de exponentiële functies $\exp r$ en $\exp -r$.

10. Scheiding in cilindrische coördinaten

Randwaardeproblemen welke betrekking hebben op cilindrische gebieden kunnen op analoge wijze als in paragraaf 8 behandeld worden door scheiding in cilindrische coördinaten, d.w.z. door lineaire superpositie van speciale oplossingen van het type $F(r)G(\theta)H(z)$. We geven weer een voorbeeld.

Voorbeeld 10.1

Men vraagt een driedimensionale harmonische functie $u(x,y,z)$ te bepalen voor de halfoneindige cylinder $x^2 + y^2 < 1$, $0 < z < \infty$ waarbij de volgende randvoorwaarden gelden

$$(10.1) \quad u = 0 \quad \text{voor} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

$$(10.2) \quad \begin{cases} u = 1 & \text{voor} \quad z = 0, \\ u \rightarrow 0 & \text{voor} \quad z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

We vervangen x,y,z door cylindercoördinaten r,θ,z en trachten de oplossing op te bouwen uit speciale oplossingen van het type (9.2). Op grond van de circulaire symmetrie hangt de oplossing niet van θ af zodat we kunnen volstaan met speciale oplossingen van het type $f(r) \exp - \lambda z$ waarbij $\lambda > 0$ kan worden verondersteld in verband met de eis voor $z \rightarrow \infty$. Voor $f(r)$ geldt de Besselvergelijking (9.3) met $\mu = 0$, t.w.

$$(10.3) \quad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \lambda^2 f = 0.$$

De algemene oplossing is een lineaire combinatie van $J_0(\lambda r)$ en $Y_0(\lambda r)$. Omdat $Y_0(\lambda r)$ voor $r = 0$ singulier is terwijl de gevraagde oplossing voor $r = 0$ stellig regulier is vervalt de bijdrage van de functie van Neumann zodat in nadere instantie de speciale oplossingen van de vorm

$$(10.4) \quad J_0(\lambda r) e^{-\lambda z}$$

zijn. We leggen hieraan nu de randvoorwaarde (10.1) op. Dit betekent dat

$$(10.5) \quad J_0(\lambda) = 0,$$

zodat λ de rij der nulpunten β_1, β_2, \dots van de Bessel functie $J_0(r)$ doorloopt. Aldus kunnen we de verlangde oplossing naar analogie van (8.7) voorstellen in reeksvorm als

$$(10.6) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\beta_n r) \exp - \beta_n z.$$

De nog onbekende coëfficiënten volgen uit de resterende randvoorwaarde bij $z = 0$. Nemen we even algemener aan dat deze randvoorwaarde $u = f(r)$ was waarbij $f(r)$ een willekeurige functie is dan betekent dit dat

$$(10.7) \quad f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\beta_n r),$$

zodat het probleem uiteindelijk gereduceerd is tot de ontwikkeling van een gegeven functie naar Fourier-achtige Bessel functies. Inderdaad staat het rechterlid van (10.7) bekend als een Fourier-Bessel reeks. Voor deze reeksontwikkeling is in de vorige paragraaf de coëfficiënten-formule (9.23) afgeleid. Weer voor $f(r) = 1$ geldt dus

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\beta_n)} \int_0^1 r J_0(\beta_n r) dr.$$

De integraal in het rechterlid kan gemakkelijk herleid worden aangezien op grond van de Bessel vergelijking

$$\beta_n^2 r J_0(\beta_n r) = - \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} J_0(\beta_n r) \right).$$

Een eenvoudige berekening geeft tenslotte

$$(10.8) \quad a_n = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)},$$

zodat de gevraagde oplossing geschreven kan worden als

$$(10.9) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_0(\beta_n r)}{\beta_n J_1(\beta_n)} e^{-\beta_n z}.$$

De boven beschreven methode lukt in het algemeen voor een cilindrische ring van het type $a_1 < r < a_2$, $b_1 < z < b_2$ of nog algemener

bij een sectorvormig deel hiervan $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Voor het welslagen van de superpositiemethode is het nodig dat de randvoorwaarden met betrekking tot de r en θ variabelen homogeen zijn. De laatste stap is dan de aanpassing aan de inhomogene voorwaarden bij de z -vlakken. Het is ondoenlijk een overzicht te geven van alle mogelijkheden en we beperken ons dan ook tot twee typische voorbeelden.

Voorbeeld 10.2

Men vraagt een driedimensionale harmonische functie $u(x,y,z)$ te bepalen voor de halfcirkelvormige cylinder $x^2 + y^2 < 1$, $y > 0$, $0 < z < \infty$ waarbij de volgende randvoorwaarden gelden

$$(10.10) \quad u = 1 \quad \text{voor} \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ en } y = 0,$$

$$(10.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = c & \text{voor} \quad z = 0, \\ u \text{ begrensd} & \text{voor } z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

In cylindercoördinaten kunnen we de halfcirkelvormige doorsnede gemakkelijker beschrijven als $r < 1$, $0 < \theta < \pi$ en kunnen we dus (10.10) vervangen door

$$(10.12) \quad u = 1 \quad \text{voor} \quad r = 1, \quad \theta = 0 \text{ en } \theta = \pi.$$

Het superpositieprincipe dient als in voorbeeld 8.2 met enige voorzichtigheid gehanteerd te worden. We stellen

$$(10.13) \quad u = 1 - \sum_{m,n} a_{mn} J_m(\lambda_n r) \sin m\theta e^{-\lambda_n z},$$

waarmede aan de voorwaarden (10.12) voldaan is als

$$J_m(\lambda_n) = 0.$$

Aanpassing aan de randvoorwaarde bij $z = 0$ leidt weer tot een ontwikkelingsprobleem

$$c = \sum_{m,n} \lambda_n a_{mn} J_m(\lambda_n r) \sin m\theta.$$

Uit de orthogonaliteitsrelaties (9.21) en

$$\int_0^\pi \sin m\theta \sin m'\theta d\theta = 0 \quad \text{voor } m \neq m'$$

volgt

$$\begin{aligned} \lambda_n a_{mn} \int_0^\pi \sin^2 m\theta d\theta \int_0^1 r J_m^2(\lambda_n r) dr = \\ = c \int_0^\pi \sin m\theta d\theta \int_0^1 r J_m(\lambda_n r) dr, \end{aligned}$$

zodat na enige herleiding

$$(10.14) \quad a_{mn} = 4c \{1 - (-1)^m\} \frac{\int_0^1 r J_m(\lambda_n r) dr}{\pi m \lambda_n (J'_m(\lambda_n))^2}.$$

Voorbeeld 10.3

In dit gecompliceerder voorbeeld geven we een toepassing van een separatie met gemodificeerde Bessel functies. Gevraagd wordt een harmonische functie voor het cilindrische gebied $x^2 + y^2 < 1$, $-\infty < z < \infty$ welke in de oorsprong een puntbron van de sterkte 1 bezit en welke op het cylinderoppervlak verdwijnt. In cylindercoördinaten moeten we dus een harmonische functie $u(r, z)$ bepalen welke zich in de omgeving van de oorsprong gedraagt als

$$(10.15) \quad u(r, z) = \frac{1}{4\pi \sqrt{r^2 + z^2}} + \text{reguliere functie},$$

en welke voldoet aan de randvoorwaarde

$$(10.16) \quad u(1, z) = 0.$$

In plaats van de door scheiding verkregen speciale oplossingen

$J_0(\lambda r) \exp \pm \lambda z$ welke een voor $z \rightarrow \pm \infty$ ongewenst gedrag hebben kiezen we

$$I_0(\sigma r) \cos \sigma z$$

hetgeen in feite op $\lambda = i\sigma$ neerkomt. In deze keuze is tevens de te verwachten symmetrie in z verwerkt. We stellen nu

$$(10.17) \quad 4\pi u(r, z) = (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - \int_0^\infty \phi(\sigma) I_0(\sigma r) \cos \sigma z \, d\sigma.$$

Aanpassing aan de resterende randvoorwaarde (10.16) geeft

$$(10.18) \quad \int_0^\infty \phi(\sigma) I_0(\sigma) \cos \sigma z \, d\sigma = (1 + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

wederom een ontwikkelingsprobleem en wel dat van een gegeven functie als een Fourier integraal. We zullen dit probleem hier niet verder behandelen maar vermelden slechts, zoals de lezer aan de hand van de beschikbare tabellen van Fourier integralen kan verifiëren, van (10.18) de omkering

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) I_0(\sigma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \sigma z \, dz = \\ &= \frac{2}{\pi} K_0(|\sigma|), \end{aligned}$$

zodat (10.17) overgaat in

$$(10.19) \quad 4\pi u(r, z) = (r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(\sigma)}{I_0(\sigma)} I_0(\sigma r) \cos \sigma z \, d\sigma.$$

Het verkregen resultaat kunnen we ook nog in een andere vorm brengen door voor $(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ eveneens een Fourier integraal te substitueren

$$(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\sigma r) \cos \sigma z \, d\sigma.$$

We verkrijgen dan tenslotte

$$(10.20) \quad 2\pi^2 u(r, z) = \int_0^\infty \frac{I_0(\sigma) K_0(\sigma r) - I_0(\sigma r) K_0(\sigma)}{I_0(\sigma)} \cos \sigma z \, d\sigma.$$

11. Scheiding in sferische coördinaten

Randwaardeproblemen welke betrekking hebben op bolvormige gebieden kunnen vaak op doelmatige wijze in sferische coördinaten of kortweg bolcoördinaten beschreven worden. Gaan we uit van de plaatsbepaling van een punt P door Cartesische coördinaten x, y, z dan worden de bolcoördinaten r, θ, ϕ van P gedefiniëerd door (zie fig. 11.1)

$$(11.1) \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

waarbij $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

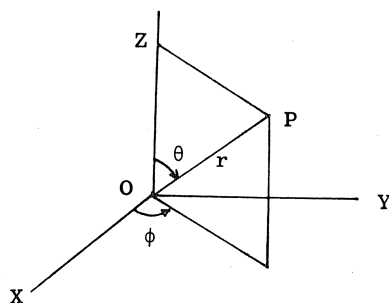


fig. 11.1

De coördinaatvlakken $r = r_0$ zijn bollen, $\theta = \theta_0$ kegels en $\phi = \phi_0$ vlakken. We kunnen de hoeken θ en ϕ op een boloppervlak vergelijken met de geografische breedte en lengte op het aardoppervlak. De lijnen $\theta = \theta_0$ zijn dan breedtecirkels en $\phi = \phi_0$ meridianen.

Zonder dit expliciet na te rekenen vermelden we dat de potentiaalvergelijking in drie dimensies in bolcoördinaten als volgt geschreven kan worden

$$(11.2) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

Bij randwaardeproblemen met een axiale symmetrie zodat de oplossing dus alleen van r en θ afhangt gaat (11.2) over in de speciale vorm

$$(11.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Zowel voor (11.2) als voor (11.3) lukt het om speciale oplossingen te verkrijgen waarbij de variabelen gescheiden zijn. Ter wille van de eenvoud beschouwen we alleen de vergelijking (11.3).

Een oplossing van het type

$$u = f(r)g(\theta)$$

leidt tot de twee gewone differentiaalvergelijkingen

$$(11.4) \quad r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - \lambda f = 0,$$

en

$$(11.5) \quad \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) + \lambda g \sin \theta = 0.$$

Zonder moeite kunnen we vaststellen dat (11.4) oplossingen van het type

$$(11.6) \quad f = r^\mu, \quad \mu(\mu + 1) = \lambda$$

heeft. De oplossingen van (11.5) zijn evenwel niet van elementaire aard. We kunnen deze differentiaalvergelijking in een wat beter hanteerbare vorm brengen door als onafhankelijk variabele

$$(11.7) \quad \cos \theta = \zeta$$

te kiezen. We kunnen (11.5) dan schrijven als

$$(11.8) \quad \frac{d}{d\zeta} \left\{ (1 - \zeta^2) \frac{dg}{d\zeta} \right\} + \mu(\mu + 1)g = 0.$$

Dit is de zogenaamde differentiaalvergelijking van Legendre. In de meest voorkomende gevallen is μ een natuurlijk getal $\mu = 0, 1, 2, \dots$. De vergelijking (11.8) heeft dan als oplossingen de polynomen van Legendre $P_m(\zeta)$, waarbij μ vervangen is door m als geheel-tallige index. De eerste paar polynomen zijn

$$P_0(z) = 1$$

$$P_1(z) = z$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z),$$

of in aequivalente notatie

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta),$$

en algemeen is

$$\begin{aligned} P_m(\cos \theta) = & \frac{(2m)!}{2^{2m} m! m!} \left\{ \cos m\theta + \frac{1}{1} \frac{m}{2m-1} \cos(m-2)\theta + \right. \\ & + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)} \cos(m-4)\theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{m(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)} \cdot \\ & \left. \cos(m-6)\theta + \dots \right\}. \end{aligned}$$

We vermelden zonder bewijs nog een paar eenvoudige eigenschappen

$$(11.9) \quad P_m(1) = 1, \quad P_m(-1) = (-1)^m,$$

$$(11.10) \quad \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = 0 \quad \text{voor} \quad m \neq n,$$

$$(11.11) \quad \int_{-1}^1 \{P_m(z)\}^2 dz = \frac{2}{2m+1}.$$

Naast de polynomiale oplossing $P_m(\zeta)$ van (11.8) voor geheeltallige $\mu = m$ is er een tweede onafhankelijke oplossing $Q_m(\zeta)$ welke evenwel singulier is in de punten $\zeta = \pm 1$.

Dank zij de orthogonaliteitsrelaties is het mogelijk een "willekeurige" functie te ontwikkelen in een reeks van Legendre polynomen. Zonder bewijs vermelden we de ontwikkeling

$$(11.12) \quad (1 - 2h \cos \theta + h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} h^m P_m(\cos \theta), \quad |h| < 1,$$

welke soms als uitgangspunt wordt gekozen voor de definitie van de Legendre polynomen door middel dus van een genererende functie. Het gebruik van de Legendre polynomen lichten we toe aan de hand van het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 11.1

Men vraagt een driedimensionale harmonische functie $u(x,y,z)$ te bepalen in de bol $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ met de randvoorwaarde

$$u = f(z) \quad \text{voor} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Hoewel dit probleem ook gemakkelijk zonder kennis van Legendre polynomen opgelost kan worden - we kennen reeds de functie van Green voor het beschouwde probleem - geven we hier een oplossing ter illustratie van het principe van scheiding van de variabelen. De speciale oplossingen welke volgens de bovenstaande methode verkregen kunnen worden in de vorm $r^\mu P_\mu(\cos \theta)$ met voorlopig nog niet nader bepaalde μ mogen geen singulariteiten voor $r = 0$ en voor $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ vertonen. Deze eis legt aan μ de beperking op tot gehele waarden $\mu = m$. Volgens het superpositiebeginsel kunnen we de verlangde oplossing voorstellen door de reeks

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m P_m(\cos \theta),$$

waarbij de coëfficiënten a_m volgen door het opleggen van de randvoorwaarde bij $r = 1$ uit

$$f(\cos \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos \theta).$$

Aangenomen dat deze reeks uniform convergeert kunnen we met behulp van de orthogonaliteitsrelaties (11.10) en (11.11) voor de coëfficiënt a_m de volgende uitdrukking afleiden

$$a_m = (m + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 P_m(z) f(z) dz,$$

zodat de verlangde oplossing nu volledig bekend is. De gevonden reeks-

voorstelling leent zich in het bijzonder tot de bepaling van u voor kleine waarden van r omdat de convergentie van de reeks daar goed is. Voor de waarde in de oorsprong vinden we het bekende resultaat

$$u(0,0,0) = a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(z) dz,$$

d.w.z. het gemiddelde van de waarde van u op het boloppervlak.

12. Hydrodynamica

Een stromende vloeistof (of gas) kunnen we mathematisch beschrijven door een van de tijd t afhangend vectorveld $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ waarbij v_i de i -de component van de snelheid is van het deeltje dat zich op de tijd t op de plaats (x_1, x_2, x_3) bevindt. De banen van de vloeistofdeeltjes zijn bepaald door de drie gewone differentiaalvergelijkingen

$$(12.1) \quad \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

Daarnaast beschouwen we vaak de stroomlijnen in een stromende vloeistof. Dat zijn lijnen welke op een zeker vast tijdstip, zeg t_0 , overal aan de snelheidsvectoren raken. De stroomlijnen zijn voor elk tijdstip bepaald door twee differentiaalvergelijkingen die geschreven kunnen worden als

$$(12.2) \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}.$$

Een stroming waarbij het snelheidsveld niet van de tijd afhangt heet een stationnaire stroming. Hierbij zijn de stelsels (12.1) en (12.2) equivalent zodat baankrommen en stroomlijnen identiek zijn.

Bij een stromende vloeistof beschouwt men naast de snelheid ook de dichtheid ρ en de druk p zodat een volledige beschrijving i.h.a. vijf afhankelijke variabelen vereist. Het principe van behoud van massa leidt bij stroming tot de zogenaamde continuïteitsvergelijking. We beschouwen een willekeurig ruimtedeel D dat begrensd wordt door het gesloten oppervlak S . De verandering in de totale massa binnen D is per tijdseenheid gelijk aan de hoeveelheid welke door de begrenzing S is heengestroomd. D.w.z.

$$- \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \iint_S \vec{n} \cdot \rho \vec{v} d\sigma.$$

Toepassing van de stelling van Gauss (1.10) geeft

$$\iiint_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) d\tau = 0.$$

Aangezien dit geldt voor een willekeurig ruimtedeel volgt hieruit

$$(12.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0,$$

de zgn. continuïteitsvergelijking.

Bij een vloeistof met een constante dichtheid spreekt men van een incompressibele stroming. Hiervoor geldt dus als speciaal geval van (12.3)

$$(12.4) \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Een vloeistof zonder inwendige wrijving, een zgn. ideale vloeistof, is gekenmerkt door een hydrostatische druk p welke op een willekeurig vlakelementje $d\sigma$ met eenheidsnormaal \vec{n} een kracht $\vec{K} d\sigma$ bewerkt zodanig, dat

$$(12.5) \quad \vec{K} = -p \vec{n}.$$

Om tot de bewegingsvergelijkingen te komen van een stromende ideale vloeistof nemen we aan dat er een uitwendige kracht \vec{F} per massaeenheid werkzaam is. We passen nu de wet van Newton $\vec{K} = m\vec{a}$ toe op een vloeistof-elementje $d\tau$ waarvan de massa dus $m = \rho d\tau$ is. De versnelling \vec{a} kunnen we a.v. herleiden

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t},$$

of

$$(12.6) \quad \vec{a} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

De hierbij optredende operator

$$(12.7) \quad \frac{D}{Dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) + \frac{\partial}{\partial t}$$

staat bekend als de substantiële afgeleide ofwel populair de meebeweegafgeleide. Deze operator beschrijft de verandering welke een vast deeltje op zijn reis ondergaat terwijl de operator $\partial/\partial t$ slechts de verandering van de situatie in een vast punt beschrijft. De kracht is samengesteld uit de uitwendige kracht $\rho \vec{F}$ en de potentiaalkracht $-\operatorname{grad} p$. Aldus komen we tot de bewegingsvergelijkingen

$$(12.8) \quad (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

We zullen ons hier slechts bezighouden met het veel voorkomende geval van een stationnaire incompressibele stroming. Deze is volgens de vergelijkingen (12.4) en (12.8) dus bepaald door

$$(12.9) \quad \begin{cases} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Voor dergelijke stromingen geldt de volgende eigenschap welke geformuleerd is door D. Bernoulli.

Stelling 12.1. (Bernoulli)

Voor een stationnaire incompressibele stroming welke stroomt onder invloed van een uitwendige potentiaalkracht $\vec{F} = - \operatorname{grad} \phi$ geldt dat de uitdrukking

$$\frac{1}{2} v^2 + \phi + p/\rho$$

langs een stroomlijn constant blijft.

Bewijs:

Kiezen we een stroomlijn en voeren we er langs een parameter s in volgens $dx_1/v_1 = dx_2/v_2 = dx_3/v_3 = ds$ dan geldt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi + p/\rho \right) &= (\vec{v} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi + p/\rho \right) = \\ &= \vec{v} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{F} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \vec{v} \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla v^2 - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = 0. \end{aligned}$$

Van veel belang is de zogenaamde potentiaalstroming, d.w.z. een stroming waarbij het snelheidsveld afgeleid is van een snelheidspotentiaal ϕ

$$(12.10) \quad \vec{v} = - \operatorname{grad} \phi.$$

In dat geval gaat de continuïteitsvergelijking (12.4) over in de vergelijking van Laplace

$$(12.11) \quad \Delta\phi = 0.$$

De stroming van een incompressibele vloeistof geeft aanleiding tot een randwaardeprobleem van Neumann. Stroomt de vloeistof in een ruimtelijk gebied D dan is de grens ∂D gekarakteriseerd door de eigenschap dat de snelheidsvector in een punt van ∂D aan de begrenzing raakt of m.a.w. dat de normaalcomponent van \vec{v} bij ∂D verdwijnt, dus dat

$$(12.12) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{op} \quad \partial D.$$

Bij een stromende vloeistof kunnen bronnen en putten aanwezig zijn. De beschouwingen van paragraaf 5 krijgen hierbij fysische betekenis. We nemen bijvoorbeeld aan dat er in het punt P_0 een bron aanwezig is welke m massa-eenheden per tijdeenheid produceert. Het massa-evenwicht binnen een gebied D dat P_0 omsluit wordt nu beschreven door

$$\iiint_D \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau = - \iint_S \vec{n} \cdot \rho\vec{v} d\sigma + m,$$

en dus door

$$\iiint_D \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} \right) d\tau = m.$$

Hieruit volgt als generalisatie van de continuïteitsvergelijking (12.3) de vergelijking

$$(12.13) \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = m\delta(P, P_0)$$

waarbij, zoals ook bij (5.4), het rechterlid een delta-functie bevat. In het speciale geval van een stationnaire incompressibele potentiaalstroming $\vec{v} = -\operatorname{grad} \phi$ gaat (12.13) over in

$$(12.14) \quad \Delta\phi = -\frac{m}{\rho} \delta(P, P_0)$$

als generalisatie van (12.11). De constante m/ρ kunnen we de sterkte van de bron noemen als zijnde de productie gemeten in volumeeenheden per tijdeenheid.

Voorbeeld 12.1

Volgens (5.4) beschrijft de functie $1/PP_0$ de snelheidspotentiaal van een incompressibele stationnaire stroming ten gevolge van een bron met de sterkte 4π in P_0 .

13. Vlakke potentiaalstroming

Een stroming in de (x,y,z) -ruimte die niet van z afhangt noemen we gemakshalve een vlakke stroming. In dat geval is het stromingsbeeld bepaald door de x -component $u(x,y,t)$ en de y -component $v(x,y,t)$ van de snelheidsvector. We beschouwen hier slechts stationnaire incompressibele stroming zodat de continuïteitsvergelijking zich reduceert tot

$$(13.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

voorzover er geen bronnen of putten aanwezig zijn. Verder beschouwen we slechts stromingsbeelden welke bepaald zijn door de snelheidspotentiaal $\phi(x,y)$ zodanig dat

$$(13.2) \quad u = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad v = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad .$$

De stroming vindt plaats loodrecht op de potentiaallijnen $\phi = \text{constant}$. Voor deze lijnen geldt immers

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

ofwel

$$u \, dx + v \, dy = 0 \, .$$

De stroomlijnen zijn dus de orthogonale trajectoriën van de potentiaallijnen.

Naast de potentiaalfunctie $\phi(x,y)$ kan men een stroomfunctie $\psi(x,y)$ invoeren welke gedefiniëerd is volgens

$$(13.3) \quad \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \psi(B) - \psi(A) \, .$$

Het linkerlid meet de hoeveelheid vloeistof welke per tijdseenheid door een boog AB heen stroomt. De vorm van de boog is hierbij irrelevant. De juistheid van deze bewering volgt gemakkelijk door toepassing van de stelling van Gauss in de vorm (1.15)

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \iint \operatorname{div} \vec{v} \, d\sigma = 0.$$

Voor de flux door een horizontaal lijnelement begrensd door $A(x,y)$ en $B(x+dx,y)$ vinden we

$$\int_A^B \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_x^{x+dx} v \, dx = - \frac{\partial \phi}{\partial y} dx,$$

maar anderzijds is dit volgens (13.3) gelijk aan

$$\psi(x+dx,y) - \psi(x,y).$$

Men heeft dus, en analoog met betrekking tot y ,

$$(13.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Dit zijn precies de vergelijkingen van Cauchy en Riemann (4.8) voor het reële en imaginaire deel van de complexe analytische functie

$$(13.5) \quad w = f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y).$$

We vatten nog even samen. Zowel de snelheidspotentiaal ϕ als de stromingspotentiaal ψ voldoen aan de vergelijking van Laplace

$$(13.6) \quad \Delta \phi = \Delta \psi = 0.$$

De lijnen $\phi = \text{constant}$ en $\psi = \text{constant}$ zijn elkaars orthogonale trajectoriën. De lijnen $\phi = \text{constant}$ zijn de potentiaallijnen, $\psi = \text{constant}$ de stroomlijnen.

De door (13.5) gedefiniëerde complexe functie $f(z)$ heet de complexe potentiaal. De componenten van de snelheidsvector volgen onmiddellijk uit (13.5) door differentiatie

$$(13.7) \quad \frac{df}{dz} = -u + iv.$$

Voor de absolute waarde $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ van de stroomsnelheid geldt uiteraard

$$(13.8) \quad V = |f'(z)|.$$

Nemen we aan dat de vloeistof zonder invloed van een uitwendige kracht vrij stroomt en stellen we de dichtheid gemakshalve $\rho = 1$ dan volgt uit

de stelling van Bernoulli dat langs een stroomlijn de uitdrukking

$$(13.9) \quad p + \frac{1}{2} |f'(z)|^2$$

constant is.

Omgekeerd levert een willekeurige analytische functie $w = f(z)$ via (13.5) en de vergelijkingen van Cauchy en Riemann een stromingsbeeld van een stationnaire incompressibele potentiaalstroming. De eventueel binnen het stromingsgebied gelegen singulariteiten van $f(z)$ kunnen evenwel complicaties geven.

In het eenvoudigste geval geeft een logaritmische singulariteit aanleiding tot een puntbron (zie 5.8).

Voorbeeld 13.1

De complexe potentiaal

$$w = -\log z$$

bepaalt een radiële stroming (zie fig. 13.1) met

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Voor de flux door een willekeurige cirkel $|z| = \rho$ vindt men

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{1}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi,$$

welk resultaat dus onafhankelijk van ρ is. De oorsprong fungeert derhalve als een puntbron van de sterkte 2π .

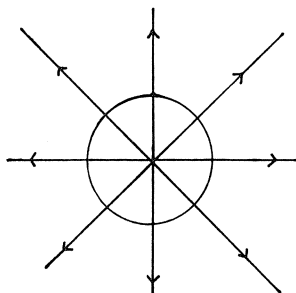


fig. 13.1

Voorbeeld 13.2

De complexe potentiaal

$$w = -\log(z^2 + 1)$$

is opgebouwd uit de twee logaritmische singulariteiten $z = i$ en $z = -i$. Het stromingsbeeld is blijkbaar symmetrisch t.o.v. de x-as zodat de x-as een stroomlijn is. Desgewenst kunnen we de stroming alleen in het bovenhalfvlak beschouwen en het gebied begrensd denken door de x-as die als vaste barrière een stroomlijn moet zijn (zie fig. 13.2). De stroomlijnen zijn $\text{Im} \log(z^2 + 1) = -\psi = \text{constant}$ of

$$(x^2 - y^2 + 1)\sin \psi + 2xy \cos \psi = 0.$$

Het zijn dus orthogonale hyperbolen door de puntbron $(0,1)$ (en ook door de gespiegelde bron) en met middelpunt $(0,0)$. Uit de schrijfwijze

$$(y + x \operatorname{tg} \psi)(y - x \operatorname{cotg} \psi) = 1$$

blijkt de ligging van de asymptoten.

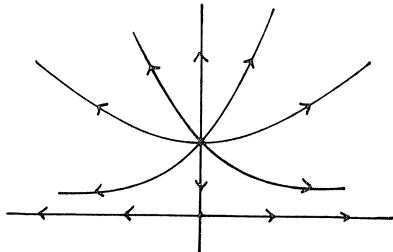


fig. 13.2

Omdat bij conforme afbeelding analytische functies weer in analytische functies overgaan levert de conforme afbeelding van een stromingspatroon (ϕ, ψ) onmiddellijk een ander stromingspatroon. Aldus is de techniek van de conforme afbeelding zoals deze in paragraaf 4 is behandeld een der belangrijkste hulpmiddelen bij het oplossen van tweedimensionale hydrodynamische problemen. In de praktijk komt dit vaak neer op het vinden van een dusdanige afbeeldingsfunctie dat een gegeven lijn, de begrenzing van het stromingsgebied, een stroomlijn wordt.

Voorbeeld 13.3

We zoeken het stromingsbeeld van een vlakke potentiaalstroming om een cirkelvormige hindernis (ruimtelijk dus om een cylinder). We nemen aan dat de stroming ver weg van de hindernis, men zegt wel de ongestoorde stroming, een uniforme parallelstroming is met de snelheid 1. We kunnen daartoe gebruik maken van de afbeeldingsfunctie (4.16) met $a = 2$

$$w = z + \frac{1}{z} = \phi + i\psi.$$

Aangezien

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} = -u + iv$$

is inderdaad ver weg van de cirkel $|z| = 1$ de snelheid asymptotisch $(-1, 0)$. Voor $z = \exp i\alpha$ is $w = 2 \cos \alpha$ zodat langs de eenheidscirkel $\psi = 0$ is en deze cirkel dus een stroomlijn is. De stroming is symmetrisch t.o.v. de x-as, die ook een stroomlijn is, zodat het voldoende is de stroming in alleen het bovenhalfvlak te beschouwen (zie fig. 13.3).

De stroomlijnen zijn bepaald door

$$(y - \psi)(x^2 + y^2) = y.$$

De snelheid verdwijnt in de punten $z = \pm 1$. Men noemt dergelijke punten stuwpunten. Voor de snelheid langs de stuw-stroomlijn geldt

$$v = |1 - z^{-2}|.$$

In het punt $z = \exp i\theta$ van de cirkelboog geldt in het bijzonder

$$v = 2 \sin \theta.$$

Volgens de stelling van Bernoulli geldt langs deze stroomlijn dat $p + \frac{1}{2} v^2$ constant is. Is p_∞ de druk in het oneindige dan is dus

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} (1 - v^2).$$

Op de cirkel is dus in het bijzonder

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta.$$

In de stuwpunten $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ is de druk dus maximaal.

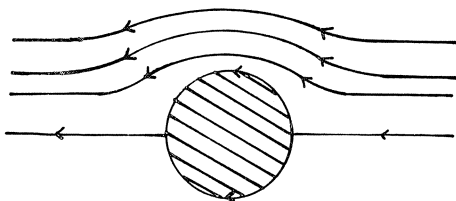


fig. 13.3

Voorbeeld 13.4

De door

$$z = \cosh w$$

bepaalde complexe potentiaal levert elliptische potentiaallijnen en hyperbolische stroomlijnen volgens

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \phi} + \frac{y^2}{\sinh^2 \phi} = 1 ,$$

en

$$\frac{x^2}{\cos^2 \psi} - \frac{y^2}{\sin^2 \psi} = 1 .$$

De punten $(\pm 1, 0)$ zijn hiervan de gemeenschappelijke brandpunten. De delen van de x-as bepaald door $|x| > 1$ zijn stroomlijnen. De stroming kan geïnterpreteerd worden als die door een opening (zie fig. 13.4).

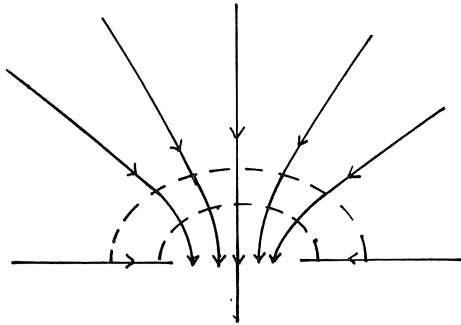


fig. 13.4

In het volgende voorbeeld demonstreren we hoe uit eenvoudige stromingsbeelden door samenstelling, d.w.z. met toepassing van (herhaalde) conforme afbeelding ingewikkelder stromingspatronen gevormd kunnen worden. We beschouwen daartoe een stationnaire parallelstroming welke verstoord wordt door een obstakel in de vorm van een gesloten kromme. Komt de ongestoorde parallelstroming uit de richting α met de absolute snelheid a dan wil dit zeggen dat de complexe potentiaal zich voor $|z| \rightarrow \infty$, d.w.z. ver weg van het obstakel, gedraagt als

$$w = a z e^{-i\alpha} + \dots$$

Uit voorbeeld 13.3 volgt dat in het geval van een stroming om een cirkelvormige hindernis de complexe potentiaal gelijk is aan

$$(13.10) \quad w = z e^{-i\alpha} + z^{-1} e^{i\alpha},$$

waarbij gemakshalve $a = 1$ gekozen is. De cirkelvormige hindernis is de eenheidscirkel $|z| = 1$, de stuwpunten zijn $z = \pm \exp i\alpha$. Het stromingsbeeld is dat van fig. 13.3 met een draaiing over α . Op dit stromingsbeeld passen we nu een conforme afbeelding

$$z_1 = g(z)$$

toe waarbij er in het oneindige niets gebeurt maar waarbij de eenheidscirkel $|z| = 1$ overgaat in een gesloten kromme C . Het nieuwe stromingsbeeld levert dan de stroming om een willekeurige hindernis C .

Voorbeeld 13.5

Op (13.10) passen we de volgende conforme afbeelding toe

$$z_1 = z + z^{-1}.$$

De eenheidscirkel $|z| = 1$ wordt getransformeerd in het lijnstuk $-2 \leq x_1 \leq 2, y_1 = 0$ zodat het nieuwe stromingspatroon de stroming beschrijft om een, driedimensionaal gesproken, vlakke plaat (zie fig. 13.5 en fig. 13.6).

Samenstelling geeft de complexe potentiaal

$$w = z_1 \cos \alpha - i \sin \alpha \sqrt{z_1^2 - 4}.$$

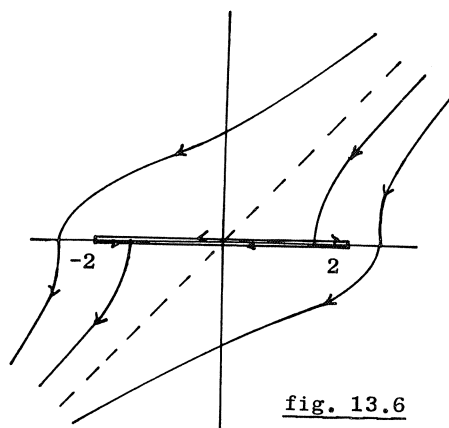
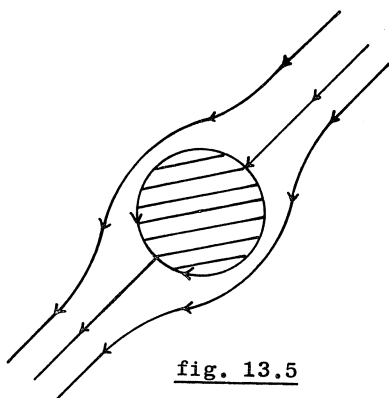
De stuwpunten van de stroming volgen uit de z_1 -beelden van $z = \pm \exp i\alpha$ als $z_1 = \pm 2 \cos \alpha$. De stuw-stroomlijn wordt in het z -vlak beschreven door $z = r \exp i\alpha$ met $|r| > 1$. In het z_1 -vlak is dus

$$x_1 = \cos \alpha (r + r^{-1}), y_1 = \sin \alpha (r - r^{-1})$$

waaruit door eliminatie van r

$$\frac{x_1^2}{4 \cos^2 \alpha} - \frac{y_1^2}{4 \sin^2 \alpha} = 1$$

volgt. De stuw-stroomlijn bestaat dus uit twee takken van een hyperbool die de punten $(\pm 2, 0)$ tot brandpunten heeft.



14. Wervels

Bij een ruimtelijke stroming $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ die geen potentiaalstroming is bestaat $\text{rot } \vec{v}$ als een niet overal verdwijnende functie. Men zegt dat een dergelijke stroming rotationeel is of wervels bezit. Bij een rotationele stroming kan de wervelsterkte gemeten worden door de circulatie over een gesloten kromme

$$(14.1) \quad C = \oint \vec{v} \cdot \vec{t} \, ds,$$

waarbij $\vec{t} \, ds$ het vectoriële lijnelement is.

Volgens de stelling van Stokes (1.18) kunnen we de circulatie met behulp van de rotatie uitdrukken als

$$(14.2) \quad C = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

We beschouwen in het vervolg slechts een tweedimensionaal stationnair stromingsbeeld.

Voorbeeld 14.1

De complexe potentiaal (verg. voorbeeld 13.1)

$$w = i \log z$$

bepaalt een circulaire stroming. In poolcoördinaten $z = r \exp i\theta$ is

$$u = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad v = \frac{\cos \theta}{r}$$

en dus $V = \sqrt{u^2 + v^2} = r^{-1}$.

Langs een willekeurige cirkel $|z| = R$ is de circulatie volgens (14.1) gelijk aan 2π . Algemeener geldt dit voor elke gesloten kromme die de oorsprong omsluit. Inderdaad is $\text{rot } \vec{v} = 0$ behalve in de oorsprong. De stroming is die van een wervel of wervelbron in de oorsprong waarvan de sterkte, de circulatie, 2π is. Op grond van (14.2) kan men met gebruikmaking van de deltafunctie van Dirac schrijven

$$\text{rot } \vec{v} = 2\pi \delta(x, y).$$

Daarnaast geldt

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

hetgeen de afwezigheid van bronnen of putten uitdrukt.

Algemeen heeft men voor de stroming bepaald door de complexe potentiaal

$$(14.3) \quad w = (a + bi) \log z$$

de betrekkingen

$$(14.4) \quad \operatorname{div} \vec{v} = -2\pi a \delta(x,y), \quad \operatorname{rot} \vec{v} = 2\pi b \delta(x,y)$$

zodat de stroming ontstaat uit de superpositie van een put ter sterkte $2\pi a$ en een wervel ter sterkte $2\pi b$ in de oorsprong. Splitsing van (14.3) in reëel en imaginair deel geeft bij gebruik van poolcoördinaten (r, θ) voor potentiaal en stroomfunctie

$$(14.5) \quad \phi = a \log r - b\theta, \quad \psi = a\theta + b \log r.$$

De stroomlijnen volgen hieruit als de logaritmische spiralen

$$(14.6) \quad r = r_0 \exp - \frac{a}{b} \theta.$$

Voorbeeld 14.2

De complexe potentiaal

$$w = a(z + \frac{1}{z}) + ib \log z, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

bepaalt een stroming die uit die van voorbeeld 13.3 ontstaat door er een circulatie aan toe te voegen. De eenheidscirkel $|z| = 1$ is wederom een stroomlijn zodat de stroming weer opgevat kan worden als die om een cylinder. De singulariteiten van w liggen buiten het fysisch interessante gebied en vereisen dus geen aparte beschouwing. Voor de stroomlijnen vinden we zonder moeite in poolcoördinaten

$$\psi = a \sin \theta (r - \frac{1}{r}) + b \log r.$$

Voor de stroomlijn langs de eenheidscirkel geldt $\psi = 0$. De plaats van

eventuele stuwpunten volgt uit

$$\sin \theta = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{-b \log r}{a(r - r^{-1})} = -\frac{b}{2a}.$$

Er zijn dus alleen stuwpunten op de cirkelomtrek $r = 1$ aanwezig als $b \leq 2a$, d.w.z. wanneer de circulatie niet groot is. Het ontstane stromingsbeeld is hieronder geschetst in fig. 14.1.

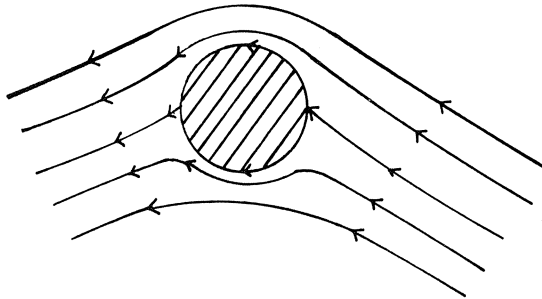


fig. 14.1

Voor de berekening van de krachten welke door een stroming op een in de stroming geplaatst lichaam uitgeoefend worden maken we gebruik van een stelling van Blasius waarin op treffende wijze het nut van functietheoretische technieken wordt gedemonstreerd.

Bij deze stelling beschouwen we een (vlakke) stationnaire incompressibele potentiaalstroming $w = \phi + i\psi$ om een door een gesloten kromme C begrensde obstakel (ruimtelijk dus een cilindrisch lichaam).

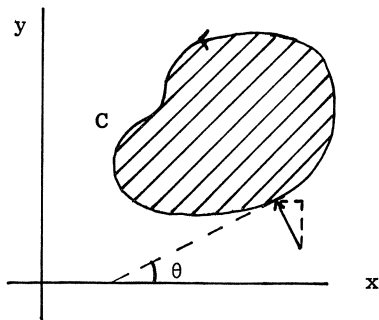


fig. 14.2

Bij de formulering van de stelling van Blasius maken we naast een complexe potentiaal en een complexe snelheid $-u + iv$ ook gebruik van een complexe kracht $F = -X + iY$. De bedoelde eigenschappen zijn

Stelling 14.1 (Blasius)

Voor de totale complexe kracht uitgeoefend op een gesloten contour geldt

$$(14.7) \quad F = \frac{\rho}{2i} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Voor het totale moment geldt

$$(14.8) \quad M = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right\}.$$

Bewijs:

Voor de kracht (dX, dY) welke uitgeoefend wordt op het boogelement ds (zie fig. 14.2) geldt

$$dX = -p \, ds \cdot \sin \theta, \quad dY = p \, ds \cdot \cos \theta.$$

Wegens $dz = \exp i\theta \cdot ds$ heeft men

$$dF = -dX + idY = ip \, dz \cdot \exp -2i\theta.$$

Volgens de stelling van Bernoulli geldt langs een stroomlijn, dus i.h.b. langs de contour C ,

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho V^2.$$

Voor de totale kracht kunnen we dan schrijven

$$F = i \oint \left(p_0 - \frac{1}{2} \rho V^2 \right) e^{-2i\theta} dz.$$

Aangezien $e^{-2i\theta} dz = (\cos \theta - i \sin \theta) ds = d\bar{z}$ verdwijnt de bijdrage van p_0 :

$$\oint e^{-2i\theta} dz = \oint d\bar{z} = 0.$$

Voor V langs C kunnen we schrijven $(u - iv)\exp i\theta$ zodat

$$v^2 = \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \exp 2i\theta.$$

Het resultaat (14.7) volgt nu onmiddellijk. De formule (14.8) kan analoog bewezen worden. Het uitgangspunt is weer het moment van een boog-element

$$dM = x dY - y dX = p(x dx + y dy).$$

Verdere details worden aan de lezer overgelaten.

Voorbeeld 14.3

De complexe potentiaal

$$w = i \log \frac{z + i}{z - i}$$

kan men interpreteren als die van een stroming in het bovenhalfvlak $y > 0$ langs de rechte $y = 0$ en om een cirkel $|z-i|/|z+i| = c$ ($c < 1$) zoals geschetst in figuur 14.3.

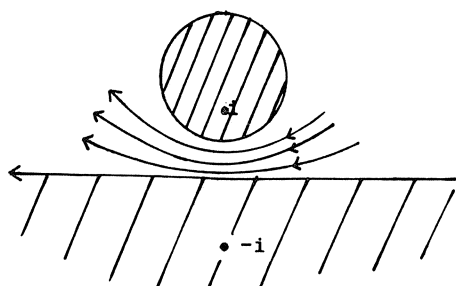


fig. 14.3

De stroomlijnen zijn

$$\left| \frac{z + i}{z - i} \right| = \exp \psi,$$

d.w.z. Apollonius cirkels die een bundel vormen met puntcirkels $(0, \pm 1)$.

De potentiaallijnen zijn de cirkels van de orthogonaal toegevoegde bundel waarvan $(0, \pm 1)$ basispunten zijn.

Volgens de formule van Blasius (14.7) geldt

$$F = -2i\rho \oint (z^2 + 1)^{-2} dz,$$

welke integraal uit het residu bij $z = i$ berekend wordt als

$$F = -i\pi\rho.$$

De stroming verwekt dus een neerwaartse kracht zodat de cylinder a.h.w. naar de kant wordt gezogen.

Voorbeeld 14.4

We passen de stelling van Blasius toe op de stroming van voorbeeld 14.2. Men heeft hierbij

$$-X + iY = \frac{\rho}{2i} \oint \left\{ a \left(1 - \frac{1}{z} \right) + \frac{ib}{z} \right\}^2 dz,$$

waaruit met behulp van residurekening - residu in $z = 0$ - het resultaat

$$X = 0, \quad Y = 2\pi\rho ab$$

volgt, zodat de stroming op de cylinder een zuiver opwaartse kracht, de lift, uitoefent.

Uit de in het laatste voorbeeld beschouwde stroming om een cirkel kan men door conforme afbeelding de stroming om een willekeurig gesloten kromme C afleiden. We gaan uit van de in het ζ -vlak beschreven stroming om de eenheidscirkel $|\zeta| = 1$.

$$w(\zeta) = a(\zeta e^{-i\alpha} + \zeta^{-1} e^{i\alpha}) + ib \log \zeta.$$

Ver weg van de verstoring is de stroming bij benadering $w(\zeta) \approx a \zeta \exp -i\alpha$ d.w.z. parallel vanuit de richting α . We passen nu de conforme afbeelding

$$\zeta = F(z)$$

toe waarbij het buitengebied van $|\zeta| = 1$ en van C op elkaar afgebeeld worden en wel op een zodanige wijze dat de ongestoorde stromingen overeenstemmen. Dit betekent dat $F(z)$ voor grote waarden van z ontwikkelbaar is als een machtreeks van het type

$$F(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

De complexe potentiaal is in het z -vlak gegeven door

$$w(z) = a \{ F(z) e^{-i\alpha} + F^{-1}(z) e^{i\alpha} \} + i b \log F(z).$$

Voor de complexe snelheid is dan

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{dF}{dz} = \left(a e^{-i\alpha} + \frac{ib}{F} - \frac{a e^{i\alpha}}{F^2} \right) \frac{dF}{dz}.$$

Voor grote waarden van z volgt hieruit

$$\frac{dw}{dz} = a e^{-i\alpha} + \frac{ib}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

en vervolgens

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = a^2 e^{-2i\alpha} + \frac{2iabe^{-i\alpha}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

We passen nu de formule (14.7) van Blasius toe. De integratieweg, oorspronkelijk de contour C , kan vervangen worden door een willekeurig grote C omsluitende cirkel zodat op de integrand de hierboven afgeleide benadering van toepassing is. Er geldt dus

$$\begin{aligned} F &= \frac{\rho}{2i} \oint \left\{ a^2 e^{-2i\alpha} + \frac{2iabe^{-i\alpha}}{z} + \dots \right\} dz = \\ &= 2i\pi ab e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Onafhankelijk van de vorm van de contour C is er dus een lift werkzaam van

$$Y = 2\pi ab \cos \alpha.$$

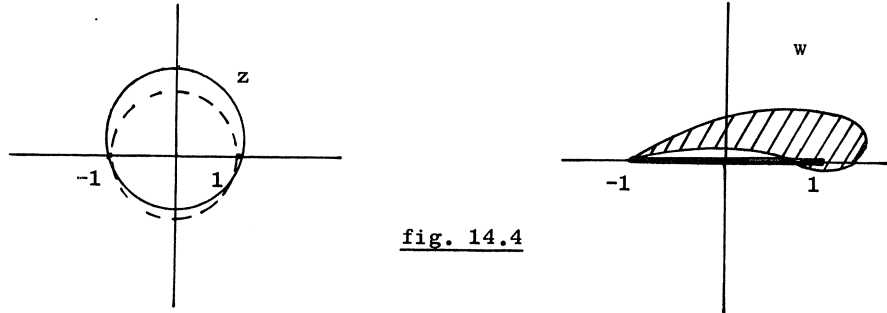
Het is deze lift welke bij de op een vliegtuigvleugel werkende krachten de essentiële rol speelt.

Volgens Joukowski kan men met een eenvoudige conforme afbeelding een realistisch model voor de doorsnede van een vliegtuigvleugel verkrijgen. We kiezen daartoe de conforme afbeelding (4.16) met $a = 1$. Een cirkel in het z -vlak die door het punt $z = -1$ gaat, het punt $z = 1$ omsluit en overigens als in fig. 14.4 tamelijk dicht bij de eenheidscirkel ligt correspondeert in het w -vlak met een tamelijk platte figuur die in $w = -1$ een keerpunt vertoont, het scherpe achtereind van een vliegtuigvleugel, de zgn. trailing edge. Analytisch blijkt dit door de cirkel in het z -vlak

voor te stellen door $z = \{1 + \varepsilon(\phi)\} \exp i\phi$ waarbij $\varepsilon(\phi)$ klein is, en bovendien $\varepsilon(\pi) = 0$.

De afbeeldingsfunctie $w = \frac{1}{2} (z + z^{-1})$ geeft dan bij benadering

$$w \approx \cos \phi + i\varepsilon(\phi) \sin \phi.$$



15. Warmtegeleiding

De warmtegeleiding in een ruimtelijk medium kunnen we beschrijven met een toestandsgrrootheid, de temperatuur $T(x_1, x_2, x_3, t)$, welke met een willekeurige schaal bijv. graden Celsius gemeten kan worden, en door een vectoriële grootheid $\vec{f}(x_1, x_2, x_3, t)$ de warmtestroom gemeten bijv. in calorieën per eenheid van oppervlak en tijd. De hoeveelheid warmte welke in een tijdelement dt door een oppervlakteelement $d\sigma$ met eenheidsnormaal \vec{n} heenstroomt is derhalve gelijk aan $\vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma dt$.

De hoeveelheid warmte die nodig is om een massaelement m een temperatuursverhoging dT te doen ondergaan is gelijk aan $m c dT$, waarbij c de soortelijke warmte is. Volgens de beginselen van de theorie van de warmtegeleiding verwekt een temperatuursverschil, of beter de gradient van T , een warmtestroom volgens de wet

$$(15.1) \quad d\vec{f} = -K \text{ grad } T \cdot \vec{n} d\sigma dt.$$

De tensoriële grootheid K is het geleidingsvermogen van het medium. In het belangrijke geval dat we nu verder uitsluitend beschouwen is het medium isotroop en homogeen. Isotroop wil zeggen dat de geleiding niet van de richting afhangt zodat K een isotrope tensor is, te vergelijken met de hydrostatische druk. Homogeen wil zeggen dat K bovendien niet van de plaats afhangt. In 15.1 is dus K voortaan een constante coëfficiënt.

Als in paragraaf 12 kunnen we de warmtebalans voor een willekeurig ruimtedeel beschrijven met een continuïteitsvergelijking

$$(15.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \text{div } \vec{f} = 0,$$

waarbij nu

$$(15.3) \quad \vec{f} = -K \text{ grad } T.$$

Combinatie van (15.2) en (15.3) geeft onmiddellijk de warmtevergelijking

$$(15.4) \quad \kappa \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{K}{\rho c}.$$

In het geval van een stationnaire temperatuursverdeling wordt (15.4) gereduceerd tot de vergelijking van Laplace

(15.5)

$$\Delta T = 0.$$

Voor de randvoorwaarden zijn er verschillende mogelijkheden.

1. Op de rand is de temperatuur voorgeschreven. Dit is dus het probleem van Dirichlet zoals dat in paragraaf 2 geformuleerd is.
2. Op de rand is de warmtestroom voorgeschreven. Dit betekent dat op de rand $\vec{n} \cdot \text{grad } T$ of in andere notatie $\partial T / \partial n$ bekend is. Dit is dus het probleem van Neumann.
3. Het beschouwde lichaam waarvan de omvang met D aangeduid kan worden staat aan zijn rand ∂D door straling in wisselwerking met zijn omgeving. Nemen we aan dat de omgeving de constante temperatuur T_0 bezit dan wil dit zeggen dat de warmtestroom aan het oppervlak ∂D evenredig is met het temperatuursverschil tussen het binnengebied en het buitengebied, d.w.z. dat

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_0).$$

Wat algemener kan i.p.v. een constante buitentemperatuur T_0 zonder bezwaar een willekeurige functie genomen worden. Dit is precies de bij het derde randwaardeprobleem behorende voorwaarde (2.4).

De in paragraaf 2 beschouwde randwaardeproblemen hebben hierdoor een concrete fysische inhoud gekregen. Het is hierdoor gemakkelijk geworden aan vragen betreffende existentie en eenduidigheid een door fysische ervaringsintuïtie geleid antwoord te geven.

Aldus is het probleem van Dirichlet wel eenduidig oplosbaar al zijn er pathologische tegenvoorbeelden mogelijk. Het probleem van Neumann is alleen oplosbaar wanneer het lichaam evenveel warmte opneemt als weer afstaat, d.w.z. wanneer de totale warmtestroom aan het oppervlak $\iint \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma$ nul is. Dit is precies de voorwaarde (2.5). Bij het derde randwaardeprobleem is er slechts sprake van een zinvol fysisch probleem wanneer een lagere buitentemperatuur een warmtestroom naar buiten tot gevolg heeft, d.w.z. wanneer $h > 0$ zoals in paragraaf 2 besproken.

Op analoge wijze als in de vorige paragraaf over de stroming van vloeistoffen kunnen warmtebronnen en -putten ingevoerd worden.

Aldus stelt de driedimensionale temperatuurverdeling

$$(15.6) \quad T = \frac{q}{4\pi KR},$$

welke i.v.m. (5.4) voldoet aan

$$(15.7) \quad K\Delta T = -q\delta(x_1, x_2, x_3),$$

de invloed van een warmtebron met de sterkte q in de oorsprong voor. Voor de warmteproductie per tijdseenheid geldt namelijk

$$-\int K \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma = q$$

waarbij de flux gemeten wordt door het oppervlak van bijv. een klein bolletje om de oorsprong.

Analoog stelt de tweedimensionale temperatuurverdeling

$$(15.8) \quad T = -\frac{q}{2\pi K} \ln r,$$

welke i.v.m. (5.7) voldoet aan

$$(15.9) \quad K\Delta T = -q\delta(x_1, x_2)$$

een warmtebron met de sterkte q in de oorsprong voor.

Aan (15.8) kunnen we natuurlijk ook de ruimtelijke interpretatie geven van een lijnbron, de x_3 -as, welke per lengteeenheid een productie van q calorieën per tijdseenheid bezit.

Voorbeeld 15.1

We beschouwen een vlakke geleidende plaat welke in (x,y) -coördinaten bepaald is door $y > 0$. In het punt $(0,1)$ bevindt zich een warmtebron met de sterkte q . De rand $y = 0$ wordt op de vaste temperatuur T_0 gehouden. Men vraagt naar de temperatuurverdeling.

Dit probleem is reeds beschreven en opgelost in voorbeeld 5.1. De oplossing is derhalve

$$T = T_0 + \frac{q}{4\pi K} \ln \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Voorbeeld 15.2

We beschouwen een geleidende cylinder welke in cylindercoördinaten bepaald is door $r < 1$, $-\infty < z < \infty$. In de cylinder bevindt zich op afstand a van de as een verticale thermische draad welke per lengteeenheid een warmteproductie q heeft. De wand van de cylinder wordt op de vaste temperatuur T_0 gehouden. Dit probleem is eveneens eerder beschreven en opgelost en wel in voorbeeld 5.2. De oplossing is

$$T = T_0 + \frac{q}{2\pi K} \ln \left| \frac{a \operatorname{re}^{i\theta} - 1}{\operatorname{re}^{i\theta} - a} \right|$$

of

$$T = T_0 + \frac{q}{4\pi K} \ln \frac{a^2 r^2 - 2ar \cos \theta + 1}{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2}.$$

Voorbeeld 15.3

We beschouwen een vlakke geleidende plaat als in voorbeeld 15.1. Aan de rand $y = 0$ wordt een gegeven temperatuurverdeling $T = f(x)$ aangebracht. De temperatuur die zich tengevolge daarvan instelt wordt beschreven door

$$\Delta T = 0 \quad \text{voor} \quad y > 0,$$

$$T = f(x) \quad \text{voor} \quad y = 0.$$

Volgens (7.2) heeft dit probleem de oplossing

$$T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x + yt)}{t^2 + 1} dt.$$

16. Grondwaterstroming

De stroming van een compressibele vloeistof in een poreus medium zoals deze optreedt in ondergrondse water of olie voerende aardlagen wordt beschreven door de volgende variabelen: de snelheid \vec{v} , de dichtheid ρ en de druk p . Onder de snelheid \vec{v} verstaan we hier niet de moleculaire snelheid maar de zogenaamde filtersnelheid waarbij $\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$ de hoeveelheid vloeistof is welke per tijdseenheid door het gerichte oppervlakteelement $\vec{n} d\sigma$ heenstroomt. De porositeit van het medium wordt beschreven door de coëfficiënt β welke de voor stroming beschikbare fractie van het volumen is. De theorie van de grondwaterstroming berust op de wet van Darcy welke bij een isotroop medium beschreven wordt door

$$(16.1) \quad \vec{v} = -k \text{ grad } p.$$

De grootheid k heet de doorlatendheidscoëfficiënt.

Voorts geldt de continuïteitsvergelijking

$$(16.2) \quad \text{div } \rho \vec{v} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Het verband tussen druk en dichtheid wordt gegeven door de toestandsvergelijking

$$(16.3) \quad \rho = \rho_0 + \alpha(p - p_0)$$

waarbij α klein is.

Uit deze drie vergelijkingen volgt zonder moeite voor een homogeen medium

$$(16.4) \quad \kappa \Delta p = \frac{\partial p}{\partial t}$$

waarbij

$$\kappa = \frac{k\rho}{\alpha\beta}.$$

Voor een stationnaire stroming geldt dan weer de potentiaalvergelijking

$$(16.5) \quad \Delta p = 0.$$

In de toepassingen beschouwen we in het bijzonder het geval van de stroming van olie of water in een vlakke laag die overal dezelfde dikte

heeft. De problemen kunnen dan beschreven worden door de tweedimensionale potentiaalvergelijking. Aan de rand van de laag kunnen de volgende randvoorwaarden gelden.

1. Aan de rand is de druk een gegeven functie van de plaats. Dit geeft een probleem van het Dirichlet type.
2. Aan de rand is de flux v_n gegeven. Dit betekent dus dat $\partial p / \partial n$ een voorgeschreven functie van de plaats is. Het probleem is dat van Neumann.

In de toepassingen heeft men verder veel te maken met olie of water producerende bronnen (of beter putten). Hun gedrag wordt op de gebruikelijke wijze beschreven.

Voorbeeld 16.1

Een cirkelvormig olieveld in poolcoördinaten beschreven door $\rho < r < R$, waarbij ρ de straal van de olieput is, produceert olie onder een constante druk p_0 . Aan de rand van het veld is de druk constant en gelijk aan p_1 . De potentiaalvergelijking (16.5) vereenvoudigt zich tot

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0,$$

waarvan de oplossing

$$p = A \ln r + B$$

is. Aanpassing van de constanten geeft

$$p = (p_1 - p_0) \frac{\ln r / \rho}{\ln R / \rho} + p_0.$$

De productie van de olieput, in m^3 vloeistof per sec. bijv., is

$$Q = 2k\pi \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 2k\pi \frac{p_1 - p_0}{\ln R / \rho}.$$

Voorbeeld 16.2

We geven hierin een toepassing van het gebruik van conforme afbeelding. Het fysische beeld is dat van een (oneindig) lang recht kanaal gegraven in een grond, zandlaag, van homogene samenstelling. Het water zal uit

het kanaal door de poreuse zandlaag heendringen. Men vraagt naar de optredende grondwaterstroming. Men kan het probleem a.v. idealiseren. We beschouwen een verticale doorsnede loodrecht op het kanaal. In dit (x,y) -vlak wordt de zandlaag beschreven door $y > 0$ en het kanaal door een lijnbron $y = 0$, $-c < x < c$. We nemen aan dat op de bodem van het kanaal de druk constant is zodat de lijnbron zelf een lijn van constante druk is. De druk elders $p(x,y)$ voldoet aan de potentiaalvergelijking en kan dus opgevat worden als het reële deel van een complexe analytische functie

$$w = f(z) = p + i\psi.$$

Het gestelde probleem wordt onmiddellijk opgelost door de conforme afbeelding

$$z = c \cosh w$$

welke uitgeschreven als

$$x = c \cosh p \cos \psi, \quad y = c \sinh p \sin \psi$$

ellipsen

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 p} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 p} = 1$$

als lijnen van gelijke druk, en hyperbolen

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \psi} = 1$$

als stroomlijnen levert, zie fig. 16.1.

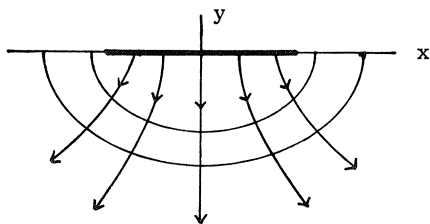


fig. 16.1

Op de x-as geldt i.h.b.

$$-c < x < c$$

$$p = 0,$$

$$|x| > c$$

$$p = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - c^2}}{c}.$$

Index

Apollonius, bol van	36	Laplace operator	5
, cirkel van	31	Legendre, differentiaalverge-	
		lijking van	60
Bernoulli, stelling van	66	, polynomen van	60
Bessel, differentiaalverge-			
lijking van	48	Neumann, functie van	48
, functies van	49	, probleem van	9
, gemodificeerde			
functies van	53	orthogonaliteitsrelaties	51,61
Blasius, stelling van	79	Poisson, integraalformule van	17
		porositeit	89
Cauchy-Riemann, vergelijkin-		productiviteit	28
gen van	15	randwaardeproblemen	9
compatibiliteitsvoorwaarde	37	, uitwendige	40
continuïteitsvergelijking	65, 85,89	richtingsafgeleide	6
		Riemann, stelling van	22
Darcy, wet van	89	Schwarz-Christoffel, methode	
Dirac, (δ -)functie van	29	van	24
Dirichlet, probleem van	9	spiegelingsprincipe	35,36
doorlatendheidscoëfficiënt	89	Stokes, stelling van	8
		stroming	28
eenduidigheid	10,49,86	, incompressibele	65
		, potentiaal-	66
filtersnelheid	89	, rotationele	77
flux	28	, stationnaire	64
Fourier-Bessel reeks	55	stroomlijnen	64
		stuwpunten	73
Gauss, stelling van	6	substantiële afgeleide	65
geconjugerd harmonische	15	superpositiebeginsel	45
geleidingsvermogen	85		
genererende functie	62	trajectoriën, orthogonale	69
Green, functie van	32,34		
, stelling van	6,7	vloeistof, ideale	65
Jacobiaan	19		
Joukowski	83		

